Digitized by Google

PIZZOFALCONE

24-J-12

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine 28/22

14 a. 60

R. BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EM. III
B. Prov.
I
1739
NAPOLI

Digitized by Google

B. Proc.
I.
1739

Digitized by Google

Digitized by Google

607936

INTORNO

AD UNA SUPERFICIE ANULARE

SECONDO LA QUALE

POTREBBONSI CONFORMARE LE ESTREMITA' DEI MOLI SPORGENTI IN MARE.

MEMORIA

DELL' ARCHITETTO

Vincenzo Antonio Rossi.

Letta all' Accademia Pontaniana il dì 14 luglio 1844, ed inserita nel Volume V degli atti

NAPOLI
DA' TORCHI DEL TRAMATER
1847.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

INDICE DELLE MATERIE

PROLEGOMENI . . . . . pag. 1

Enunciati e discussi i principii della scienza meccanica ed idraulica, si statuiscono le condizioni alle quali debbono soddisfare le forme dalle estremità del Molo.

PROPOSIZIONE PRIMA — *Definire le forme della estremità del molo* » 11

Si definiscono. E si dimostra, come soddisfano alle statuite condizioni.

PROPOSIZIONE SECONDA — *Definire la generazione della superficie, cui appartiene la parte inferiore profilata concava della estremità del Molo* . . . . . » 19

Se ne da la generazione geometrica. E si dimostra ad essa sup. appartenere essa parte inferiore profilata concava.

COROLLARIO I. . . . . » 22

Si dimostra che il raggio della generatrice della sup. ha un valore massimo ed uno minimo: e quali sono.

COROLLARIO II. . . . . » 23

Che la curva dei centri delle generatrici è una curva chiusa.

COROLLARIO III. . . . . » 23

Che essa curva ha una ordinata massima ed una minima; e quali sono.

COROLLARIO IV. . . . . » 24

Che la sup. chiude spazio, rientra in se stessa, ed ha un nodo.

COROLLARIO V. . . . . » 24

Che ha un piano diametrale: e quale è.

COROLLARIO VI. . . . . » 24

Come il piano diametrale taglia la sup.

COROLLARIO VII. . . . . » 24

Del contatto tra la sup. ed il piano delle basi dei cilindri contemplati nella sua generazione.

COROLLARIO VIII. . . . . » 25

Del suo contatto con uno di essi medesimi cilindri.

COROLLARIO IX. . . . . » 25

Sulla determinazione della curva dei centri, e della curva di contatto contemplata nel corollario precedente.

SCOLIO I.° . . . . . » 26

Delle due sup. uguali e simmetricamente poste, che ammettono la medesima generazione: e come con una medesima definizione, possano abbracciarsi entrambe, o si possa escluderne una.

Digitized by Google

Scolio 2.° . . . . . » 28

Di altre due sup. parimenti uguali e simmetricamente poste, le quali potrebbero colle due precedenti, essere tutte da una medesima generazione date: e quale questa esser dovrebbe.

Scolio 3.° . . . . . » 29

Che di una sola di esse quattro sup. si tratta: e quale sia. E qui s'indica colla sola parola *superficie*.

Proposizione terza — *La superficie definita nella proposizione precedente è data in grandezza e posizione, date che siano di posizione una retta ed un punto, e di grandezza altre due rette.* 29

Ciò si dimostra: e dimostrasi quale sia la retta ed il punto dati di posizione, e quali le rette date di grandezza.

Corollario I. . . . . » 31

Che la sup. ha una *Retta Direttrice*, un *Punto Determinatore*, e due *Parametri*.

Scolio 1.° . . . . . » 31

Sulla *Retta Direttrice*, sul *Punto Determinatore* e sui *Parametri*. E come essi sono i *determinanti della sup.*

Corollario II. . . . . » 33

Che essi determinanti, sono *determinanti della curva dei centri* ancora.

Corollario III. . . . . » 33

Quali curve date, è anche data la sup.: e sua altra generazione.

Scolio 2.° . . . . . » 33

Come può con questa sua altra generazione determinarsi la circonferenza generatrice in ogni suo luogo.

Scolio 3.° . . . . . » 34

Che la sup. non può aversi come generata da una sfera, nè è inviluppo di sfere: non è del genere delle sup. *canali*. È *Anulare*; ed appartiene ad una famiglia delle *Anulari*; che comprende sei casi o *sotto varietà*.

Scolio 4.° . . . . . » 36

Che la sup. è *inviluppo di sup. rigata* non sviluppabile. E della *caratteristica* dell'inviluppo: ed altra generazione della sup.

Proposizione quarta — *Dati i determinanti della superficie, ed un punto sul piano orizzontale di projezione: riconoscere se quel punto è projezione di un punto della curva dei centri; ed essendolo determinare il corrispondente punto in projezione verticale.* . . . . . » 38

Ciò si fa coi metodi delle projezioni rette (della Geom. Descrittiva). E dopo si dimostra.

Proposizione quinta — *Dati i determinanti della superficie, ed un punto sul piano verticale di projezione: riconoscere se quel punto può essere projezione verticale di un punto della curva dei centri; ed essendolo determinare il corrispondente in projezione orizzontale* . . . . . » 40

Ciò si fa coi metodi delle projezioni rette (della Geom. Descrittiva). E dopo si dimostra.

Digitized by Google

Scolio . . . . . » 42

Si costruiscono le projezioni della curva dei centri: e la sua trasformata sullo sviluppo del *cilindro dei centri*. E di qualche proprietà di essa curva.

Proposizione sesta — *Dati i determinanti della superficie, ed un punto sul piano orizzontale di projezione: riconoscere se quel punto è projezione di un punto della superficie; ed essendolo, determinare il corrispondente punto in projezione verticale.* » 48

Ciò si fà coi metodi delle projezioni rette (della Geom. Descr.). E dopo si dimostra.

Lemma — *Doti i determinanti della superficie, ed un piano parallelo alla retta direttrice; costruire la curva d'intersezione della superficie col piano* . . . . . » 51

Si costruisce sul piano orizzontale di projezione. E dopo si dimostra il fatto.

Corollario . . . . . » 54

Che la curva costrutta nel Lemma, ha o due rami chiusi e staccati, od un ramo chiuso con un punto isolato, od un ramo chiuso ed annodato, od un sol ramo chiuso e senza nodo.

Proposizione settima — *Dati i determinanti della superficie ed un punto sul piano verticale di projezione: riconoscere se quel punto è projezione di un punto della superficie, ed essendolo determinare il corrispondente punto in projezione orizzontale.* 55

Ciò si fà coi metodi delle projezioni rette. E dopo si dimostra.

Corollario . . . . . » 58

Che il dato punto in projezione verticale può essere projezione e di uno, o di due, o di tre, o di quattro punti della sup.

Scolio 1.° . . . . . » 58

Si costruisce la sup., costruendo le projezioni di una serie delle sue circonferenze generatrici. E delle projezioni di essa sup..

Scolio 2.° . . . . . » 62

Si costruisce la sup., quale inviluppo di sup. rigate, costruendo le projezioni di una serie delle sue caratteristiche. E della caratteristica individuata che passa per un dato punto della sup. inviluppo.

Nota — Sulla equazione della sup. e della sua caratteristica. E della sup. generale che comprende i sei casi, o sotto varietà, di cui la sup. di che si tratta n'è uno.

Corollario . . . . . » 66

Che le ascisse ed ordinate delle projezioni di una medesima caratteristica, sono date in una serie di triangoli simili, dati di specie. E per essi si costruiscono le projezioni della caratteristica che passa per un dato punto.

Scolio 3.° . . . . . » 68

Della sup. rigata ed elementi normali a quelli della inviluppata. E costruzione delle sue rette. E dei casi singolari di essa sup. ad elementi normali a quelli della inviluppata.

Lemma — *Dati i determinanti della superficie, ed un suo punto: costruire l'inviluppata rigata non sviluppabile della superficie che passa pel punto dato.* . . . . . » 71

Digitized by Google

Ciò si fà costruendo per mezzo di una serie di triangoli rettangoli simili dati di specie, le projezioni di una serie di rette dell' inviluppata, le quali toccano la sup. nei punti di una sua medesima caratteristica. E dopo, ciò si dimostra.

PROPOSIZIONE OTTAVA — *Dati i determinanti della superficie ed un suo punto; menare il piano tangente alla superficie pel punto dato* 75

Si costruiscono le tracce del piano tangente, per via di una paraboloide iperbolico tangente alla inviluppata rigata, corrispondente alla caratteristica che passa pel punto dato, e lungo quella sua retta che passa per esso medesimo punto.

LEMMA — *Dati i determinanti della superficie, ed una retta: costruire una superficie rigata, le di cui rette tocchino la superficie data, e si appoggino alla retta direttrice di questa ed alla retta data; e costruire la curva di contatto di esse due superficie* . . . . . » 80

Ciò si fà costruendo le projezioni di una serie di rette di essa sup. rigata; e costruendo le projezioni di una serie di punti della curva di contatto di essa coll' anulare. — Ed alcune relative discussioni si fanno.

COROLLARIO I. . . . . » 87

Che la retta data è una linea quadrupla di questa rigata che tocca ed abbraccia l' anulare.

COROLLARIO II. . . . . » 88

Che questa medesima rigata che tocca ed abbraccia l' anulare ha *due falde distinte*; e la curva di suo contatto coll' anulare ha due rami distinti.

COROLLARIO III. . . . . » 88

Che le due falde di essa medesima rigata che tocca ed abbraccia l' anulare si tagliano o si toccano secondo una loro retta comune, la quale passa pel nodo dell' anulare. E che li due rami della curva di contatto si tagliano o toccano nel nodo medesimo.

PROPOSIZIONE NONA — *Dati i determinanti della superficie, ed una retta: menare il piano tangente alla superficie per la retta data.* . . . . . » 89

Ciò si fà determinando in primo il punto di contatto. E si dimostra stare nella intersezione di due curve: e queste curve si costruiscono. Onde noto il loro punto d' intersezione, si costruiscono le tracce del piano tangente, costruendo quello del piano che passa per questo punto, e per la retta data.

COROLLARIO . . . . . » 93

Si dimostra che i piani tangenti che passano per la retta data sono in generale quattro; ma che possono ridursi a tre, a due, ed anche ad uno, secondo che varia la posizione della retta data.

SCOLIO I.° . . . . . » 94

Si dimostra che le date soluzioni per menare il piano tangente sono applicabili ad ogni anulare a retta direttrice: e che può applicarsi a tutte esse tutto il detto intorno alle fatte costruzioni grafiche. E con quali modificazioni ciò si possa. E come in ordine alla più semplice anulare a retta direttrice (sup. del toro) la data soluzione del piano tangente per un punto della sup. si riduce a quella data negli elementi.

Digitized by Google

Nota — Sulla espressione analita dell'anulare a retta direttrice la più generale; e della sua inviluppata, e della sua caratteristica.

Scolio 2.° 97

Si dimostra che le soluzioni medesime del piano tangente possono accommodarsi del pari a qualunque siasi superficie anulare; ed eziandio le costruzioni grafiche precedentemente esposte: e si ragiona su esse superficie anulari in generale.

Nota — Che tutte le anulari vanno distinte in *undici grandi Classi*.

Tavola I.

Dati il punto determinatore D, la retta direttrice $(R, \rho r)$ ed i parametri M, N della sup., ed il punto P sul piano orizzontale di projezione, si è costrutto il corrispondente punto p in projezione verticale, della *curva dei centri*.

Tavola II.

Dati il punto determinatore D, la retta direttrice $(R, \rho r)$ ed i parametri M, N della sup., e dato il punto p sul piano verticale di projezione, si è costrutto il corrispondente punto P in projezione orizzontale *della curva dei centri*.

Tavola III.

Dati il punto determinatore D, la retta direttrice $(R, \rho r)$, ed i parametri M, N della sup., si sono costruite le tre projezioni della *curva dei centri*: e la sua trasformata sullo sviluppo del *cilindro dei centri*.

Tavola IV.

Dati il punto determinatore D, la retta direttrice $(R, \rho r)$ ed i parametri M, N della sup.; e dato il punto P in projezione orizzontale, si sono costrutti i corrispondenti punti p, p' in projezione verticale della sup.

Tavola V.

Dati il punto determinatore D, la retta direttrice $(R, \rho r)$ ed i parametri M, N della sup., si sono costrutti.

1.° la curva di sua intersezione col piano ph' parallelo alla retta direttrice $(R, \rho r)$.

2.° i suoi punti P, P' in projezione orizzontale della sup., corrispondenti al punto dato p in projezione verticale.

Tavola VI.

Dati il punto determinatore D, la retta direttrice $(R, \rho r)$ ed i parametri M, N, si è costrutta la sup. per una serie della sue generatrici: e si sono costrutti i contorni delle sue projezioni.

Tavola VII.

Dati il punto determinatore D, la retta direttrice $(R, \rho r)$ ed i parametri M, N, si è costrutta la sup. per una serie delle sue caratteristiche: e si sono costruiti i contorni delle sue projezioni.

Digitized by Google

Tavola VII.

Dati il punto determinatore D, la retta direttrice $(R, \rho r)$, ed i parametri M, N, della sup.; e dato il suo punto (P, p), si sono costrutti

1.° la caratteristica che passa pel punto dato (P, p).

2.° la inviluppata rigata della sup., che la tocca secondo essa caratteristica.

3.° il piano $GY'K$ che tocca la sup. nel punto (P, p) dato su di essa.

Tavola IX.

Dati il punto determinatore D, la retta direttrice $(R, \rho r)$, ed i parametri M, N della sup.; e data la retta (IH, hi), si sono costrutti

1°. La rigata le di cui rette toccano la sup., e si appoggiano alla sua direttrice $(R, \rho r)$ ed alla retta data (IH, hi).

2.° La linea di contatto della sup. colla rigata.

3.° Il piano ZI, hx, tangente alla sup. e menato per la retta data (IH, hi).

4.° Il punto di contatto $(Q4, q4)$ della sup. col piano ad essa tangente menato per la retta data (IH, hi).

Digitized by Google

> Quelli che s'innamorano della pratica, senza la diligenza ovvero scienza, per dir meglio, sono come i nocchieri che entrano in mare senza timone o bussola, e mai non hanno certezza ove si vadano.
>
> Leonardo da Vinci — *Trattato della Pittura* N. XXIII.

PROLEGOMENI

1. Le forme e le dimensioni da dare ad ogni bene intesa opera architettonica, non sono in generale arbitrarie del tutto: dipender debbono precipuamente dalle forze moventi e resistenti che agiscono sulle singole parti dell'opera, e che debbono elidersi in parte, restando le resistenti in eccesso sulle moventi. Le quali forze nelle opere idrauliche non si possono avere come causate dal peso delle masse solide soltanto, come è in tutte le altre, ma vengo-

Digitized by Google

no a generarsi ancora pel movimento dei fluidi nei quali alcune parti di esse opere sono. Così la teorica sulla resistenza dei fluidi indefiniti o definiti, e le sperienze instituite per comprovarne i risultamenti, od anche le ipotesi assunte a fondamento di essa, han date le principali norme e regole per la scelta delle forme che meglio convengansi a quei corpi isolati nella corrente, che si addimandano pile o piloni, o ad altri ostacoli isolati del pari.

Similmente a volere determinare le forme e le dimensioni da dare alle parti componenti un' opera marittima è uopo avere investigate e conosciute le forze che col movimento delle onde, o più generalmente delle acque del mare vengono a generarsi.

2. Se imperfetta è la teorica conosciuta col nome di teorica dei fluidi indefiniti, la quale in sostanza non esamina che la resistenza che offre l' acqua stagnante ad un mobile galleggiante che per essa si muova, o quella che un corpo immerso in varia guisa offre ad una corrente che può aversi come ridotta alla equabilità e come avente un moto lineare, solo perchè non si conosce come un tal movimento viene a modificarsi, ossia quali movimenti vadano prendendo le falde fluide elementari nell' investire il corpo; talchè è uopo avere ricorso ad ipotesi, le quali riescono più o meno prossime al vero, secondo che meglio rispondano ai fenomeni naturali, o meglio ne spieghino gli effetti; non è da meravigliare che sia imperfetta la teoria del movimento delle onde, o più generalmente del movimento delle acque del mare; dal quale dipender debbono le forze che operano sui corpi in esso immersi, o che è lo stesso, le resistenze dei corpi medesimi.

La scienza dei numeri è giunta a potere esprimere in

Digitized by Google

termini generalissimi ogni affezione di moto di una massa fluida comunque sollecitata da forze. Ma cotali espressioni elegantissime, sono di natura tanto trascendenti che non ancora si sanno applicare neppure a tutti quei casi nei quali sola forza sollecitante immediata è la gravità. Onde poi è stato bisogno ricorrere a varie ipotesi per le quali quelle espressioni generalissime diventate più semplici si fossero potute esprimere in termini finiti, almeno nella più gran parte dei casi particolari.

Il movimento delle onde, o più generalmente il moto delle acque del mare, dipendendo da molte altre cagioni, come dall' impeto dei venti, dalla conformazione delle coste, dal modo vario del comunicarsi dei mari, dalla natura e giacitura del suolo sottomarino, dai corsi tributarii, e da molte altre cause, è chiaro, che quando anche le accennate espressioni generalissime delle affezioni del moto, fossero assai trattabili in termini finiti, non potrebbeseno far uso, non solo per non potersi esprimere le varie forze sollecitanti la massa fluida, ma ancora per non conoscersi tutte.

Di qui è che pel movimento dello onde, come per alcuni moti delle acque correnti, fu mestieri ricorrere ad ipotesi, le quali, come è chiaro, non potevano tutt' i casi comprendere.

3. Innanzi tutti il celebre Leonardo da Vinci studiò in certa guisa il moto delle onde. Newton di poi trattò ancora qualche questione relativa al movimento dello onde, e più particolarmente andò rintracciando la velocità delle onde generate alla superficie di un liquido per uno scuotimento instantaneo. Presso a poco nei termini medesimi fu considerato da La Place, La Grange, Biot, e Poisson.

*

Digitized by Google

Ma un tal moto, ognun vede, è dissimile dal movimento delle onde marine: le cause del quale sembra che non abbiano nulla di comune colla causa dell' ondulazione superficiale suddetta.

In Francia il marino La Coudraye, e l' ingegnere civile Bremontier fecero alcune ricerche di fatto intorno al moto delle onde marine: impresero un' esame dei fenomeni naturali che seguono pel movimento delle onde, ed il Bremontier ne trasse conseguenze per l' arte di edificare. L' ingegnere militare Emy stabilì di poi una nuova teorica pel movimento delle onde: e fu suo scopo principalissimo cavarne norme per l' Architettura marittima. E poichè le forme e le dimensioni delle singole parti di qualunque siasi bene intesa opera architettonica, come ho assunto di sopra (1), dipender debbono dalle forze agenti e resistenti che ne investono ciascuna parte, è scopo principalissimo delle ricerche di Emy il determinare quali forze vengono a generarsi per un tale movimento.

4. La ipotesi da lui assunta a fondamento della sua teorica, mentre coincide con un sentimento emesso da Newton, cioè che l' ascensione ed abbassamento delle molecole acquee avesse luogo *per circulum*, spiega meglio di ogni altra tutti i fenomeni naturali che avvengono pel movimento ondulatorio delle acque del mare: e pare risultare chiaro, essere cagione principalissima del deperimento delle parti immerse di un edifizio marittimo il moto di traslazione che per la ondulazione viene a generarsi in alcune masse fluide inferiori, quando avendo grande ampiezza ed altezza la ondulazione alla superficie, manca la profondità necessaria perchè le altre ondulazioni inferiori sminuendosi procedendo in giù con legge di continuità, del tutto si estinguano

Digitized by Google

in fine. Alle quali masse fluide può convenire ottimamente il nome di *onde sottomarine di traslazione*, perchè gli elementi fluidi che le compongono si muovono realmente con moto progressivo, mentre il moto progressivo delle onde alla superficie non è reale nei loro elementi fluidi, ma solo apparente.

Le onde sottomarine di traslazione adunque per la loro natura acquistar debbono una quantità di moto, e quindi debbono sviluppare una forza che vada potentemente ad investire le parti immerse dell'edifizio.

Ed è chiaro che se fosse possibile esprimere in numeri cotali masse fluide e la loro velocità corrispondente alla più grande ondulazione che presumibilmente potesse avere effetto al luogo dello stabilimento di un edifizio marittimo, si potrebbono esprimere in numeri, e senza ricorrere alle espressioni trascendenti generalissime del moto di una massa fluida comunque sollecitata da forze, quelle che a causa del moto ondulatorio delle acque del mare operano sulle masse resistenti di un edifizio marittimo; e quindi si potrebbero determinare in numero le dimensioni da dare alle sue singole parti, ed i limiti tra i quali si potrebbero variarne le forme; e per modo da meglio soddisfare ad un tempo alle altre condizioni di economia, convenienza, e facile esecuzione.

5. Il signor Emy nella sua teorica non si occupa punto di cercare le espressioni numeriche di tali masse fluide che ho chiamate onde sottomarine di traslazione.

Se potesse rintracciarsi la scala delle ampiezze ed altezze delle ondulazioni dell'intera massa fluida dalla sommità al fondo, non sarebbe difficile nei casi di ondulazioni semplici il determinare la equazione della curva secondo la

Digitized by Google

quale si accommoda il profilo di un' onda sottomarina di traslazione data l' ampiezza e l' altezza di una ondulazione alla superficie: e quindi la espressione numerica della forza, che pel movimento di essa onda, anderebbe contro il corpo immerso. E difatto data la equazione di una curva può aversi come data l'area di un suo segmento: e quindi nella specie si avrebbe la quantità di moto: conciosiacosacchè i parametri della curva profilo dell' onda sottomarina di traslazione e la velocità del suo movimento potrebbero rispettivamente dedursi dalla ampiezza ed altezza di una ondulazione alla superficie e dalla successione di due ondulazioni consecutive; cose determinabili colle osservazioni.

Non del pari sarebbe non molto difficile la cosa, quando si trattasse di ondulazioni composte; perciocchè in un tal caso sarebbe uopo incominciare dal determinare la equazione delle orbite percorse dalle molecole fluide alla superficie: e la determinazione di cotali orbite mi si presentò risultare dalla eliminazione di otto quantità tra nove equazioni differenziali nel caso di ondulazioni cospiranti, e di dodici quantità tra quattordici equazioni pure in parte differenziali nel caso di ondulazioni obbliquе, allora che nel 1837 dando il primo corso di lezioni biennali sulle costruzioni e sull' arte di progettare alla Scuola di Applicazioni di Ponti e Strade io me ne occupai. Onde chiaro si vede a quali difficoltà anderebbesi incontro volendo esprimere in numeri le forze che le onde sottomarine di traslazione sviluppano. Ma fortunatamente in parecchi casi non è di assoluta necessità il determinare numericamente l' intensità della forza agente che viene a generarsi per le ondulazioni: e basta solo il proccurare che la sua direzione si andasse variando al punto di applicazione per modo da eluderne almeno in

Digitized by Google

parte l'effetto. Così il signor Emy senza farsi a rintracciare la quantità delle forze, effetto delle onde sottomarine di traslazione, va ragionando in vece, valendosi di rappresentazioni grafiche puramente geometriche, intorno al modo come poter fare che le masse fluide costituenti le dette onde sottomarine di traslazione andassero ad investire la faccia di paramento di un corpo immerso, parte di un edifizio marittimo, con direzione da potersi avere come parallela, almeno prossimamente, alla faccia medesima: e dimostra venire con questo ad eludersi ancora, od almeno a diminuirsi l'effetto delle forze dipendenti dal movimento orbicolare degli elementi fluidi componenti le onde visibili. E ne deduce dovere essere di forma concava i profili del paramento visto esteriore dei piediritti o muri continuati da stabilirsi nel mare o sulle sue coste normalmente alla direzione della traversia dominante, o poco ad essa inclinati. Il quale profilo concavo potrebbe poi variarsi secondo la prudenza dell'architetto, assumendosi o circolare, od ellittico, o cicloidale od anche spirale, ed è chiaro d'altronde dover esser guida alla scelta dell'una, o dell'altra di cotali curve, le diverse maree, la natura della spiaggia o della costa, i materiali disponibili e simili.

6. Per li diversi lavori di essiccazione fatti in quella parte del bacino inferiore del Volturno che è alla sinistra del fiume dell'istesso nome, essendosi portati a sboccare i diversi condotti di scolo nell'infimo tronco dell'antico Clanio, si valutò il vantaggio che sarebbesi ottenuto raddrizzandone il canale della sua foce che andava serpeggiando per su la spiaggia, col dargli sbocco diretto nel mare: e quanto sarebbe stato opportuno il provvedere che le cose non fossero tosto ritornate al primitivo stato. Onde s'immaginò in sulle prime di guer-

Digitized by Google

nire al solito il nuovo sbocco, per un certo tratto, con moli guardiani. I fianchi dei quali avrebbero dovuto resistere alla pressione laterale delle acque correnti, ed opporsi alla espansione; mentre le estremità inferiori si sarebbero opposte all'impeto del mare.

E poichè io trovavami deputato alla direzione di quei lavori, andai immaginando in qual modo avrebbonsi potute conformare le estremità di quei moli, perchè in conformità delle innanzi esposte nozioni avessero corrisposti all'offizio loro: comunque senza impiegare cotali moli, si fosse di poi provveduto allo scopo con mezzo più opportuno e più efficace (*).

Il passaggio pressochè instantaneo dalla bassa all'alta marea, e dalla calma alla burrasca, parmi potersi in certo modo paragonare alle subitanee escrescenze di un fiume torrente. E quindi le estremità di quei moli che ai tempi delle più basse acque e di calma dovevano sorgere fuori acqua, e ad un tratto rimanere circondate dalle onde al sopravvenire di alte acque, burrasche od ondulazioni mezzane, parvemi si potessero paragonare a quei piloni da edificarsi in mezzo ai fiumi della detta natura.

Però per questa parte io argomentava la conformazione più conveniente di tali estremità di moli, poter essere quella medesima di tali piloni, cioè di due porzioni eguali

(*) Le opere per lo innanzi usate alle foci in mare dei fiumi o canali consistono od in robusti moli che s'internano dentro mare, od in solidissime palificate imbottite di fascine e sassi. — In vece alla nuova foce dell'antico Clanio fu costrutta da ciascun lato una palificata sommersa a traforo, per modo che le acque da per ogni dove avesservi potuto liberamente girare per di dentro — Intorno a ciò veggasi la nota F della mia *memoria idraulica-economica pel diffinitivo bonificamento della campagna Vicana*, pubblicata nel 1843; ed anche il mio opuscolo idraulico intitolato: *Di una efficacissima pratica per istabilire la sussistenza dello sbocco dei fiumi in mare.*

Digitized by Google

di cilindro retto aventi per base insieme due archi uguali, sottesi dai lati di un triangolo equilatero avente per terzo lato la larghezza del molo alla estremità inferiore.

Ma stante che cotali estremità avrebbonsi dovute stabilire sur una spiaggia assai protratta; e la quale indi ad alcune centinaja di metri rapidamente scende, ne segue che dalle onde sottomarine di traslazione sarebbono state violentemente investite; spezialmente sul primo imperversare della burrasca: e siffatte onde in quei paraggi sogliono essere assai impetuose, perchè le onde del largo vi hanno liberissimo cammino, soprattutto al soffiare dei venti più dominanti.

Avventuratamente nella specie non sarebbe stato uopo conoscere in numeri la intensità della forza che sarebbe venuta ad investire quelle estremità, perciocchè al più forte urto, che debb'aver luogo ai tempi della traversia dominante, avrebbe resistito presso che tutta la lunghezza del molo. Ma non pertanto sarebbe stato uopo provvedere a diminuirne nel modo anzidetto (5) l'effetto, affinchè non solo la stabilità del molo considerato come di un sol pezzo fosse stata assicurata, ma eziandio quella di ciascuna sua parte, in guisa che per le ripetute percosse non se ne fossero potute disgregare le parti componenti. Quindi io argomentava che avrebbonsi dovute dare a quelle estremità forme partecipanti della forma normale che meglio conviene alle pile dei ponti nei torrenti, e del profilo concavo che meglio è acconcio ai paramenti dei piediritti investiti dalle onde e normali alla direzione della traversia dominante. E poichè i detti piloni si compongono di due parti di superficie continua riunite secondo un'angolo saliente, il cui canto verticale giace sul piano di simmetria, io m'imponeva le quattro seguenti condizioni per la scelta della superficie secondo la quale io intendeva

Digitized by Google

avrebbe dovuto conformarsi il paramento visto delle estremità di ciascuno dei detti moli : cioè

1.° Che la parte inferiore fosse dappertutto profilata concava :

2.° Che la parte superiore al termine della concavità fosse verticale e secondo le dette due porzioni di cilindro :

3.° Che la intersezione od unione delle due parti di superficie costituenti la parte inferiore conformata concava avesse luogo secondo una curva, giacente sul piano di simmetria :

4.° Che le parti concave si fossero quasi con continuità raccordate colle parti convesse superiori, e che tutte si fossero innestate con simile raccordamento continuo colle parti piane verticali laterali del molo.

7. Però comunque quel solido non dovevasi comporre, pure piacevami fare investigazioni intorno alla superficie, per fine di poterne trarre facile maniera di costruirlo, quando fosse uopo, in pezzi d' intaglio. E quelle investigazioni avendomi condotto alla conoscenza di verità non dispregevoli; e dalle quali potrebbero trarsene per avventura più importanti applicazioni pratiche, o scientifiche, mi sono indotto ad ordinare in proposizioni le fatte ricerche, delle quali alcune tengono assai dappresso alla pura Geometria, altre alle applicazioni sue alla effettiva costruzione del solido, o taglio dei pezzi costituenti ciascuna estremità di molo. E le prime sono tutte raccolte in questa Memoria, che ho l'onore di presentarvi, o Illustrissimi Accademici : e non come cosa che io reputassi d'ardua difficoltà, essendo invece semplici e spontanee le mie ricerche, ma come tali che prese in considerazione da alcuno di Voi di più alto ingegno e sapere, potrebbero dare opportunità di scovrire verità importanti, alle quali più importanti applicazioni seguissero.

Digitized by Google

PROPOSIZIONE PRIMA

Definire le forme della estremità del molo.

8. Su di un piano orizzontale intendasi descritto un rettangolo, pianta del molo; sul lato minore più basso, cioè verso il mare, e sul medesimo piano un triangolo equilatero; e cogli estremi di un tal lato comune al rettangolo ed al triangolo come centri, ed esso lato come raggi, s'intendano descritti due archi circolari sottesi dagli altri due lati del triangolo. Il lato comune al triangolo ed al rettangolo si intenda prolungato ugualmente dalle due parti; e coi punti estremi del prolungamento come centri, e colla loro distanza dagli estremi più remoti del lato del triangolo equilatero prolungato come raggio, s'intendano descritti due altri archi di circolo; li quali toccheranno i primi e s'incontreranno sulla perpendicolare al lato prolungato, condotta pel vertice dell'angolo opposto del medesimo triangolo equilatero, prolungata del pari.

I due archi sottesi dai lati del triangolo equilatero si intendano divisi in un egual numero di parti eguali, e per li punti di divisione e pei loro centri s'intendano condotte delle rette: le quali taglieranno gli altri archi di raggio maggiore. E li due archi sottesi dai lati del triangolo equilatero si abbiano per tanto prolungati per quanto le rette condotte pei successivi loro punti di divisione giungano al punto d'incontro dei due archi di raggio maggiore.

I due archi di raggio minore abbiansi come projezione ortogonale di due porzioni di cilindri retti; e le rette

Digitized by Google

condotte per li loro punti di divisione, come projezione ortogonale di piani verticali. Ognuno di questi piani taglierà il cilindro eretto sull' arco pel di cui punto di divisione passa, secondo una retta lato di esso. Sur un tal piano s' intenda descritto un quadrante circolare con un' estremo tangente ad essa retta, e che abbia per altro estremo il punto d' incontro della retta, projezione del piano, coll' arco maggiore.

Un simile quadrante s' intenda descritto su ciascuno degli altri piani.

Esistano tanti di tali piani per quanti sono i punti immaginabili di ciascuno degli archi sottesi dai lati del triangolo equilatero, prolungati come è detto; e su ciascuno di essi esista il corrispondente quadrante circolare. Tutti cotali quadranti, che saranno infiniti di numero, costituiranno per ciascuno dei due archi di raggio minore una superficie curva: e ciascun quadrante toccherà una retta delle porzioni di cilindro aventi gli archi sottesi dai lati del triangolo equilatero per projezione ortogonale, pure infinite di numero. Le porzioni di tutte tali rette tangenti, superiori ai loro punti di contatto coi detti quadranti, e tutti questi presi insieme, escluse le loro parti superiori oltre la intersezione di quelli di una superficie con quelli dell' altra, costituiscono la forma della estremità del molo.

9. Dico ora che così conformata la estremità del molo, soddisfa alle dette (6) quattro assunte condizioni: cioè

1.° La parte inferiore sarà dappertutto profilata concava.

Di fatto poichè ogni quadrante tocca la retta del cilindro per la quale il suo piano passa, rivolgerà la convessità ad una tal retta. Ma deve avere l' altro suo estremo comune con un punto dell' arco di raggio maggiore.

Digitized by Google

Dunque avrà l'altro estremo al di fuori delle due porzioni dei cilindri, le di cui rette sono toccate da ciascuno di essi. Dunque la sua concavità sarà rivolta verso fuori. Ma tutti i quadranti costituiscono la parte inferiore della estremità del molo. Dunque essa è dappertutto conformata concava.

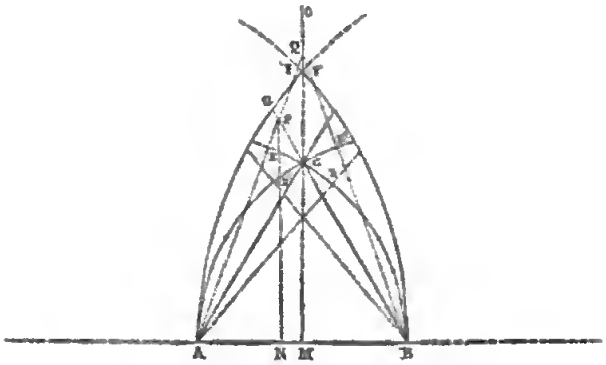
2.° La parte superiore al termine della concavità sarà verticale, e conformata secondo due porzioni eguali di cilindro retto, aventi per basi insieme due archi eguali sottesi dai lati di un triangolo equilatero avente per terzo lato la larghezza di esso molo alla estremità inferiore.

Emerge immediatamente dalla data generazione; perciocchè tutte le rette che toccano li infiniti quadranti circolari, costituiscono due porzioni di cilindro retto aventi le dette basi. Di fatto gli archi descritti cogli estremi del lato del triangolo equilatero comune al lato del rettangolo come centro, e col lato medesimo come raggio, sono projezioni ortogonali di due porzioni di cilindro, delle quali quelle rette sono lati.

3.° La intersezione od unione delle due porzioni di superficie costituenti la parte inferiore conformata concava ha luogo secondo una curva che giace sul piano di simmetria.

Ogni punto della intersezione debb' essere punto comune a due quadranti circolari generatori, che passano per quel punto. Epperò dovrà stare sulla intersezione di due piani che hanno per projezioni ortogonali due di quelle rette, che passano pei punti di divisione degli archi sottesi dai lati del triangolo equilatero e pei loro rispettivi centri. Onde la projezione ortogonale del punto d'intersezione individuato starà sul punto intersezione di due di dette rette.

Digitized by Google



Or tali rette, o passeranno per punti di divisione non di ugual sede degli archi sottesi dai lati del triangolo, o passeranno per punti di divisione di ugual sede. Siano, *ABC* il triangolo equilatero; *ACE'*, *BCE* gli archi sottesi dai lati *AC*, *BC* del triangolo e prolungati, divisi ciascuno in egual numero di parti eguali; *CM* una retta condotta pel vertice *C* del triangolo, e perpendicolare alla sua base *AB* ed indefinitamente prolungata verso *O*. Le rette *AE*, *AC*, *AD* ecc. *BE'*, *BC*, *BD'*, ecc. che passano per li punti di divisione degli archi, s' incontreranno; e vogliano considerarsi o due rette, come le *AE*, *BC*, che non passano per due punti di divisione di ugual sede, ma in vece pei due *E*, *C* corrispondenti agli archi *BE*, *AC* disuguali, ed il primo maggiore del secondo; ovvero le due rette *AE*, *BE'*, che passano per due punti di divisione *E*, *E'* di ugual sede, per modo che gli archi *BE*, *AE'* sono uguali.

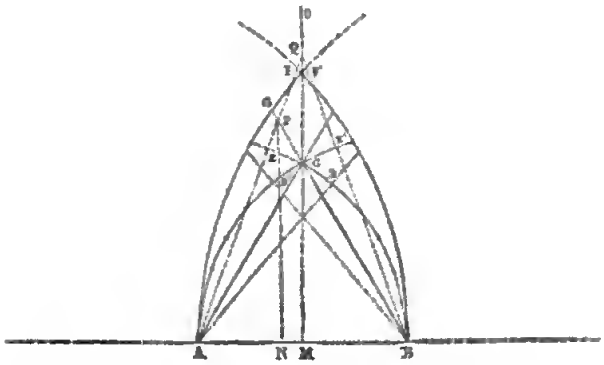
Considero dunque in primo le rette *AE*, *BC*. L' arco *BE* essendo maggiore dell'arco *AC* per ipotesi, sarà *EF* maggiore di *CG*; perciocchè gli archi *BF*, *BC*; ed *AG*,

Digitized by Google

AC sempre più si allontanano scostandosi da' punti *A*, *B* di contatto. Eppero il quadrante generatore che è sul piano di cui *AF* è projezione ortogonale, sarà maggiore del quadrante generatore che è sul piano di cui *BG* è projezione ortogonale. Sia *P* il punto d' incontro delle due rette *AF*, *BG*. Per *P* s' intenda calata la perpendicolare *PN* ad *AB*. Essendo per ipotesi l'arco *BE* maggiore di *AC*, sarà l'angolo *PAN* maggiore dell'angolo *PBN*; e quindi la retta *BP* maggiore della retta *AP*: in oltre sarà ancora *BN* maggiore di *AN*, e quindi il punto *P* si troverà fuori della retta *MO*. Ma *AE* è uguale a *BC*, dunque *CP*, sarà maggiore di *PE*. E quindi *PF* maggiore di *PG*. Ma *PF*, *PG* rappresentano, dei due quadranti generatori che sono sui piani projettati in *AF*, *BG*, le ascisse corrispondenti al punto di ciascuno che è su la intersezione di essi piani; e li quali punti sono projettati nel punto *P*. Dunque se i due quadranti che sono su i piani projettati in *BG*, *AF*, s' incontrassero, s' incontrerebbero in un punto della loro periferia corrispondenti ad ordinate diseguali; la qual cosa è impossibile. Dunque comunque due rette passanti per punti non analoghi di divisione s' incontrino, e quindi i piani di cui sono projezione; pure i quadranti che sur essi sono non s' incontrano.

Considero ora due rette *AF*, *BF'*; che passano per due punti di divisione *E*, *E'* di ugual sede; cioè tali che sia l' arco *BE* eguale all' arco *AE'*. Sia *Q* il loro punto d' incontro; e da un tal punto d' incontro s' intenda calata *QM* perpendicolare ad *AB*. Per ipotesi essendo eguali gli archi *BE*, *AE'*, gli angoli *BAQ*, *QBA* dei triangoli rettangoli *QMA*, *QMB* saranno eguali, e quindi *BM* eguale ad *AM*; onde la retta *QM* si confonderà colla perpendicolare con-

Digitized by Google



dotta pel vertice C del triangolo equilatero sul lato AB di esso triangolo comune col lato minore del rettangolo. In oltre essendo per ipotesi gli archi BE, AE' eguali, saranno pure per generazione eguali tra loro gli archi AF, BF'; e quindi EF, eguale $E'F'$. Dunque i quadranti generatori situati sui piani AF, BF' saranno eguali tra loro. Ma è AQ eguale a BQ, dunque resterà QF eguale a QF'. Ma QF, QF' rappresentano, dei due quadranti generatori che sono sui piani projettati in AF, BF', le ascisse al punto di ciascuno che è su la intersezione di essi piani, e li quali punti sono projettati nel punto Q. Dunque essendo i raggi dei quadranti giacenti sui piani projettati in AF, e BF' eguali tra loro, ed essendo Q la projezione della intersezione, s' incontreranno i quadranti; e sarà Q la projezione del punto d' incontro.

Si è già dimostrato non potersi incontrare i quadranti generatori li quali sono su piani che non passano per punti di divisione di egual sede. Dunque li quadranti costituenti le due parti di superficie componenti la parte inferiore dell' estremità del molo conformata concava s' incontreranno a

Digitized by Google

due a due secondo punti projettati sulla retta OM, che passa pel punto d' incontro degli archi maggiori, pel punto d' incontro C degli archi minori, vertice del triangolo equilatero ACB, e perpendicolare alla base AB dello stesso triangolo: nè s' incontrano diversamente.

Dunque la curva d' intersezione sarà piana, e starà sul piano projettato in OM; il quale, come è chiaro, è piano di simmetria.

4.° Le parti concave inferiori, quasi con continuità si raccordano colle parti convesse superiori, e tutte s' innestano con simile raccordamento continuo colle parti verticali laterali del molo.

Ogni quadrante generatore (8) ha per tangente al suo estremo superiore la retta sul suo piano, che è lato della porzione di cilindro retto, di cui l' arco pel di cui punto di divisione la retta projezione del quadrante passa, è projezione ortogonale. Tutti essi quadranti costituiscono le parti concave inferiori dell' estremità del molo; e tutte le rette da essi toccate costituiscono le parti convesse superiori. Dunque le parti concave inferiori quasi con continuità si raccordano colle parti convesse superiori.

Le parti convesse superiori appartengono alle porzioni di cilindro retto aventi per projezioni ortogonali gli archi sottesi dai due lati del triangolo equilatero i di cui centri sono agli estremi del terzo lato, che è comune col lato minore del rettangolo pianta del molo. Ma tali archi hanno ciascuno per retta tangente al punto che è centro dell' altro, ed estremo del terzo lato del triangolo equilatero, il lato maggiore del rettangolo pianta del molo, il quale è projezione della sua parte piana verticale. Dunque le

parti convesse superiori sono tangenti alle pareti verticali laterali del molo.

I quadranti generatori sono regolati in grandezza dalla parte di ciascuna retta condotta pei punti di divisione degli archi sottesi dai lati del triangolo equilatero, e pel rispettivo centro di ciascuno, la quale parte è intercetta tra essi archi e gli archi maggiori aventi per centri gli estremi di esso terzo lato egualmente prolungato dalle due parti, i quali sono perciò tangenti agli archi minori, negli estremi del terzo lato del triangolo, che è comune col lato minore del rettangolo pianta del molo. Dunque ove l'estremità del molo s'innesta colle sue pareti piane laterali, l'ampiezza del quadrante generatore della parte inferiore del l'estremità del molo diventa nulla: e però restano quivi le sole parti superiori convesse.

Dunque le parti concave inferiori quasi con continuità si raccordano colle parti convesse superiori, e tutte s'innestano con simile raccordamento continuo colle pareti piane verticali laterali del molo.

Digitized by Google

PROPOSIZIONE SECONDA

Definire la generazione della superficie cui appartiene la parte inferiore profilata concava della estremità del Molo.

10. Due cilindri retti a base circolare si tocchino per di dentro lungo una loro retta; e per l'asse del cilindro minore passi un piano. Sopra un tal piano stia una circonferenza di circolo di raggio eguale alla distanza dei lati dei cilindri sur esso, che sono dalla stessa parte dell'asse; e col centro sul cilindro maggiore ed alto dal piano delle basi pel raggio.

Il piano per l'asse del cilindro minore roti intorno all'asse istesso; e rotando trascini seco la circonferenza che giace sur esso, la quale vada variando in grandezza per modo da soddisfare alle dette condizioni in ogni posizione del piano.

La circonferenza col suo movimento genera una superficie.

Alla superficie così generata appartiene la parte inferiore profilata concava della estremità del molo.

11. Dei quattro archi descritti (8), due colle estremità del lato del triangolo equilatero comune al rettangolo come centro, ed esso lato come raggio e gli altri due coi punti estremi del prolungamento di detto lato come centri, e colla loro distanza dagli estremi più remoti del lato medesimo come raggio, si considerino soltanto quelli che sono da una stessa parte della perpendicolare al detto lato, condotta pel vertice dell'angolo opposto.

*

Digitized by Google

Abbiansi come compiutamente descritti i circoli di cui essi due archi sono parti; e tali circoli sieno basi di due cilindri retti. I due circoli avendo i centri meno distanti tra loro che non è il raggio maggiore, e su di una retta il di cui estremo è loro punto di contatto, in questo punto si toccheranno, e per di dentro.

Dunque i due cilindri avranno comune il lato, che passa per quel punto, e si toccheranno per di dentro, secondo un tal lato.

Si consideri un individuato quadrante generatore. Il piano di un tal quadrante avendo per projezione ortogonale sul piano del triangolo una retta, sarà perpendicolare al suo piano, e quindi perpendicolare al piano delle basi dei cilindri. E la retta che ne è projezione ortogonale, passando pel centro del circolo che ha per raggio il lato del triangolo equilatero, ossia pel centro del circolo base del cilindro minore, il piano di cui essa retta è projezione ortogonale passa per l'asse di esso cilindro minore.

Dunque l'individuato quadrante generatore giace su di un piano che passa per l'asse del cilindro minore.

E valendo il medesimo ragionamento per ogni altro quadrante generatore individuato; giace ciascuno su di un piano che passa per l'asse del cilindro minore. E se infiniti sono i quadranti, infiniti sono del pari i piani che passano per l'asse del cilindro minore.

Ma tutti cotali infiniti piani equivalgono a tutte le infinite posizioni che può prendere un piano che passa per l'asse del cilindro minore e che intorno ad esso rota. Dunque tutti gli infiniti quadranti generatori equivalgono agli infiniti valori e posizioni che prenderebbe un individuato quadrante che giacesse sul piano che rota, e condizionato

Digitized by Google

sempre ad avere un suo estremo tangente alla retta sul piano, lato del cilindro minore, e per altro estremo il punto d'incontro della retta projezione del piano colla circonferenza base del cilindro maggiore.

Per la quale condizione il quadrante non solo tocca con un suo estremo il lato del cilindro minore sul suo piano, ma tocca ancora coll'altro suo estremo la retta che è projezione ortogonale del suo piano, sul piano delle basi dei cilindri; perciocchè le rette tangenti ad un circolo nei punti estremi di un suo quadrante sono perpendicolari tra loro; ed il piano delle basi dei cilindri è perpendicolare ai lati del cilindro minore. Ma la tagente ad un circolo è perpendicolare a quel suo raggio che passa pel punto del contatto. Dunque il raggio di un individuato quadrante generatore corrispondente a quello dei suoi estremi che è punto d'incontro della projezione del suo piano colla circonferenza base del cilindro maggiore è normale al piano della base. Dunque si confonde con uno dei lati del cilindro maggiore: e così per tutti i quadranti generatori. Però i centri dei quadranti generatori saranno allogati sul cilindro maggiore.

Di un individuato quadrante generatore si consideri il raggio che passa pel suo estremo superiore, cioè per l'estremo che è punto di suo contatto colla retta sul suo piano, lato del cilindro minore. Un tal raggio è perpendicolare al detto lato; ma questo è parallelo ai lati del cilindro maggiore, e su questo è il centro del quadrante; dunque il raggio di un individuato quadrante generatore corrispondente al suo estremo superiore misura la distanza dei lati del cilindro maggiore e del minore, i quali sono sul piano del quadrante e da una stessa parte dell'asse del cilindro minore. Lo

Digitized by Google

stesso può ragionarsi per tutti gli altri quadranti generatori. Dunque rotando il piano intorno all' asse del cilindro minore, il quadrante generatore che giace sur esso, in ogni sua posizione ha il raggio uguale alla distanza dei lati dei cilindri sul piano, posti da una stessa parte dell' asse di rotazione.

E poichè ogni quadrante tocca il piano dei circoli base dei cilindri; i centri dei quadranti non solo staranno sul cilindro maggiore; ma in oltre il centro di ciascuno sarà alto dal piano della base del cilindro maggiore pel raggio.

Per le precedenti conseguenze adunque dati due cilindri retti a base circolare, che si tocchino per di dentro secondo un lato, ogni quadrante generatore starà sul piano che passa per l' asse del cilindro minore, sarà di raggio uguale alla distanza dei lati dei cilindri sul piano, che sono da una stessa parte dell' asse, ed avrà il centro alto sul piano delle basi pel raggio.

E se in vece dei quadranti esistano le circonferenze cui quei quadranti appartengono, tali circonferenze in tutte le posizioni del piano rotante soddisferanno alle condizioni stesse cui soddisfano i quadranti che ne sono parte; e la superficie generata dalle circonferenze cui essi appartengono.

Dunque la parte inferiore profilata concava della estremità del molo appartiene alla superficie la di cui generazione è enunciata di sopra (10).

COROLLARIO I.

12. Il piano che rota, in ogni sua posizione incontra quattro lati dei cilindri; due da una parte e due dall' al-

Digitized by Google

tra dell'asse di sua rotazione: ed in una intera rotazione passa successivamente per tutti i lati di ciascun cilindro. Tra le sue infinite posizioni adunque ve ne è una nella quale passa pel lato del contatto dei cilindri. In questa posizione, da una parte dell'asse di rotazione, cioè verso il contatto la distanza dei lati dei cilindri è nulla, dall'altra parte è la massima: la quale distanza, rotando il piano, ove era nulla andrà crescendo, ove massima decrescendo: e ciò da qualunque verso si muova. Dunque il raggio della circonferenza generatrice avrà un valore massimo eguale alla differenza dei diametri delle basi dei cilindri, ed un valore minimo uguale a zero.

COROLLARIO II.

13. Rotando il piano e trascinando seco la circonferenza generatrice, mentre essa genera la superficie, il suo centro genera una curva; ed una tal curva sta sul cilindro maggiore, ed è una curva chiusa. Perciocchè il centro di ciascuna generatrice è sul cilindro maggiore, e l'altezza del centro dal piano delle basi dei cilindri è uguale al raggio della circonferenza generatrice, che va crescendo e poi decrescendo (12) per medesimi gradi di grandezza a cominciare dal suo valore nullo.

COROLLARIO III.

14. Per la medesima ragione, la curva dei centri riferita ad applicate sul piano delle basi dei cilindri, avrà un' ordinata massima uguale alla differenza dei diametri delle basi dei cilindri, ed una ordinata minima uguale a zero.

Digitized by Google

COROLLARIO IV.

15. La curva dei centri essendo chiusa (13); ed il raggio della circonferenza generatrice tra i suoi infiniti valori avendone uno nullo (12); la superficie chiude spazio, rientra in sè stessa, ed ha un nodo o punto di regresso.

COROLLARIO V.

16. Se due circoli si toccano per di dentro stanno simmetricamente intorno al diametro che passa pei centri prolungato; dunque dai quattro corollarii precedenti emerge, che la superficie ha un piano diametrale: ed è il piano che rota della generatrice, nella sua posizione per la retta di contatto dei cilindri.

Il piano adunque condotto pel nodo della superficie e per l' asse del cilindro minore è piano diametrale della superficie.

COROLLARIO VI.

17. Quando il piano delle generatrici, rotando, passa pel contatto dei cilindri; gli altri due lati di questi che sono sul piano hanno la distanza massima (12).

Dunque il piano diametrale taglia la superficie nel nodo o punto di regresso; e secondo la circonferenza generatrice massima.

COROLLARIO VII.

18. La curva dei centri delle circonferenze generatrici, giacendo sul cilindro maggiore; e l' altezza di ogni suo

Digitized by Google

punto dal piano delle basi dei cilindri essendo uguale al raggio della circonferenza generatrice che ha quel punto per centro (10); la superficie toccherà il piano dei circoli basi dei cilindri; e sarà da esso piano toccata secondo una linea: e la linea di contatto sarà la projezione ortogonale della linea dei centri sur esso piano. Sarà dunque la circonferenza del circolo base del cilindro maggiore.

COROLLARIO VIII.

19. La circonferenza generatrice in ogni sua posizione toccando uno dei lati del cilindro minore; è questo toccato dalla superficie. E la linea del contatto sta sul cilindro minore, è chiusa, ed ha in grandezza le applicate al piano dei circoli basi dei cilindri, uguali alle applicate della curva dei centri.

COROLLARIO IX.

20. La curva dei centri delle circonferenze generatrici dunque, e la curva di contatto della superficie col cilindro minore, hanno rispettivamente per projezioni sul piano dei circoli basi dei cilindri, la circonferenza della base del cilindro maggiore, e quella della base del cilindro minore; e per projezione su di un piano qualunque ortogonale con quello delle basi dei cilindri, e quindi anche sul piano diametrale, curve determinabili da ascisse uguali alle ascisse dei punti delle circonferenze base dei cilindri, li quali sono su di un medesimo raggio prolungato del circolo minore, computate sulla intersezione dei piani di projezione; e da ordinate uguali tra loro ed uguali alla porzione di detto raggio prolungato terminata dai detti punti.

SCOLIO 1.

21. Un cilindro retto a base circolare può aversi come generato da una retta mobile condizionata ad appoggiarsi alla circonferenza di un circolo e mantenendosi perpendicolare al piano del circolo medesimo. Sieno date le due circonferenze, di cui sono parti i due archi (8) aventi per centri l'uno l'estremo del lato del triangolo equilatero comune col lato minore del rettangolo, e l' altro l'estremo del prolungamento del lato medesimo, ed entrambi da una stessa parte della perpendicolare al detto lato condotta per vertice opposto del triangolo. Assunte tali due circonferenze come direttrici, una retta mantenendosi al loro piano perpendicolare e ad esse appoggiandosi generi due cilindri.

Ciascuno di siffatti cilindri potrà aversi come diviso in due metà dal piano delle loro circonferenze direttrici, e rispetto al quale piano esse metà saranno simmetriche, e ciascuna sola potrà considerarsi come un cilindro retto a base circolare: ed essendo orizzontale il piano delle dette circonferenze l'uno starà al di sopra, e l'altro al disotto del piano delle circonferenze, cui i dati due archi circolari appartengono.

Sul piano rotante adunque potranno stare due circonferenze generatrici che soddisfano alle condizioni richieste per la enunciata (10) generazione della superficie. Di fatto in una individuata sua posizione il piano rotante taglierà i cilindri secondo quattro rette: due da una parte dell' asse di rotazione, e due dall' altra; e la distanza delle due prime sarà in grandezza il raggio della circonferenza generatrice in una sua individuata posizione; e la distanza delle due seconde sarà in grandezza il raggio della circonferenza

Digitized by Google

generatrice nella sua posizione dopo una semirivoluzione a cominciare dalla precedente; ma il suo centro dovendo stare sul cilindro maggiore e distante dal piano delle direttrici dei cilindri pel raggio, ne avrà la posizione nella intersezione della retta del cilindro maggiore sul piano rotante nella individuata posizione, con un piano condotto parallelo al piano delle circonferenze direttrici e distante da esso pel raggio: ed è sempre possibile condurre due di cotali piani.

Date le medesime cose adunque, vi saranno in generale due superficie uguali e simmetricamente disposte intorno al piano delle basi dei cilindri, generate, secondo la enunciata generazione, da due circonferenze uguali messe sul medesimo piano rotante.

Tali circonferenze generatrici si toccheranno, e la tangente al punto di contatto genererà, nella rotazione, il piano delle basi dei cilindri, come il punto di contatto genererà la circonferenza base del cilindro maggiore.

22. Per esprimere una sola delle due superficie, che possono stare intorno al piano delle basi dei cilindri, e propriamente la superiore, ho detto (10) dovere essere il centro della circonferenza generatrice *alto dal piano delle basi pel raggio*. Se si dicesse *depresso sotto il piano delle basi* si verrebbe ad esprimere l'altra superficie uguale e simmetrica alla prima. Si abbraccerebbero entrambe tanto solo che si dicesse in generale: dovere il centro della circonferenza generatrice stare sul cilindro maggiore *distante dal piano delle basi pel raggio:* e nella generazione di entrambe prese insieme, potrebbesi considerare intatta la continuità; perocchè il nodo o punto di regresso (15) dell' una superficie è ad un tempo nodo o punto di regresso dell' altra, ed

Digitized by Google

assumendo come primitiva posizione del piano rotante quella in cui esso passa pel nodo, potrebbesi avere che in una prima rivoluzione del piano si generasse la superficie superiore, ed in una seconda la inferiore.

SCOLIO 2.°

23. Potrebbesi anche maggiormente generalizzare la generazione, tanto solo che si sopprimesse *dovere essere i lati dei cilindri sul piano rotante* che determinano la lunghezza del raggio della circonferenza generatrice *dalla stessa parte dell' asse*. E la generazione abbraccerebbe allora altre due superficie pure uguali tra loro e simmetricamente disposte rispetto al piano delle circonferenze direttrici dei cilindri, ma dissimili dalle prime due.

Di fatto il piano rotante, in ogni sua posizione taglia i due cilindri secondo quattro rette, e queste ammettono quattro distanze diverse; delle quali due danno i raggi di due circonferenze appartenenti a due posizioni della generatrice delle superficie considerate nello scolio precedente, e due danno i raggi di due altre circonferenze appartenenti a due posizioni della generatrice delle altre due superficie.

24. Queste due nuove superficie, che sono generate da circonferenze di raggio uguale alla distanza dei lati dei cilindri sul piano rotante, li quali prendono in mezzo l' asse di rotazione del piano, ossia del cilindro minore, saranno chiuse del pari, ma ciascuna invece che avere un nodo o punto di regresso, avrà una linea doppia, che è linea di intersezione delle due foglie di cui si compone ciascuna superficie, e le quali si toccano in un punto di essa linea doppia: il qual punto tiene luogo del nodo o punto di regresso delle altre due dette superficie.

Digitized by Google

SCOLIO 3.°

25. La superficie presa a trattare adunque e definita nella Proposizione seconda (10), appartiene alla famiglia compresa nella accennata più generale generazione (23). E non parlerò che di quella soltanto, essendo essa che dovevasi da me trattare.

PROPOSIZIONE TERZA.

La superficie definita nella proposizione precedente è data in grandezza e posizione, dato che siano di posizione una retta ed un punto, e di grandezza altre due rette.

26. Siano date tali cose.

Pel dato punto s'immagini condotto un piano normale alla retta data di posizione. Sur un tal piano e col suo punto d'intersezione colla retta data di posizione come centro, e colla minore delle due rette date in grandezza come raggio, s'intenda descritta una circonferenza; e con un punto sulla congiungente il punto dato col punto d'intersezione del piano colla retta data di posizione, e distante dal primo per la differenza delle rette date di grandezza come centro, e colla retta maggiore come raggio s'intenda descritta un'altra circonferenza.

Tali circonferenze si prendano come direttrici di due cilindri la di cui retta generatrice sia parallela alla retta data di posizione. Saranno essi cilindri li due contemplati nella generazione definita nella proposizione precedente (10). Di fatto il piano delle circonferenze direttrici dei cilindri

Digitized by Google

essendo normale alla retta data di posizione; ad una tal retta tenendosi parallele le generatrici dei cilindri, essi saranno retti ed a basi circolari. Ma le due circonferenze hanno i loro centri distanti per la differenza dei raggi; dunque si toccheranno per di dentro. Dunque i cilindri si toccheranno del pari per di dentro.

Per la retta data di posizione s'intenda condotto un piano. Un tal piano taglierà i cilindri, ed il piano delle loro direttrici. E poichè le generatrici dei cilindri, sono parallele alla retta data di posizione, il detto piano, che per essa passa, taglierà i cilindri secondo i loro lati; e saranno essi lati d'intersezione perpendicolari alla intersezione del medesimo piano coll'altro delle direttrici dei cilindri. Ed i lati d'intersezione dei piani coi cilindri saranno quattro; due da ciascuna parte della retta data di posizione, e le quali due apparterranno l'una ad un cilindro e l'altra all'altro.

Sul piano condotto per la retta data di posizione s'intenda descritta una circonferenza di circolo, col centro su quello di cotali due lati d'intersezione che sono da una stessa parte della retta data di posizione, il quale si appartiene al cilindro maggiore, e tangente non solo all'altro di cotali due lati che è quello che si appartiene al cilindro minore, ma ancora alla retta d'intersezione del piano per la retta data di posizione col piano delle direttrici dei cilindri. Una tale circonferenza toccando il lato del cilindro minore sul suo piano, ed il piano delle direttrici dei cilindri, sarà di raggio uguale alla distanza dei lati dei cilindri sul piano, ed avrà il centro sul cilindro maggiore ed alto pel raggio sul piano delle direttrici dei cilindri, ossia delle loro basi.

Digitized by Google

Tutte le immaginate operazioni sono possibili; e per la retta data di posizione possono condursi infiniti piani, su ciascuno dei quali sono possibili le medesime operazioni immaginate sur uno.

Dunque data una retta ed un punto di posizione, e due altre rette di grandezza, è data di grandezza e di posizione la superficie.

COROLLARIO I.

27. La superficie la cui generazione è data nella proposizione seconda, essendo data in grandezza e posizione, dato che sieno di posizione una retta ed un punto, e di grandezza altre due rette; ha una *Retta Direttrice*, un *Punto Determinatore*, e due *Parametri*.

SCOLIO I.

28. Chiamo *Retta Direttrice* la retta intorno cui si rivolge il piano della circonferenza generatrice; perciocchè essa dirige la posizione del piano di questa.

29. Chiamo *Punto Determinatore* il punto dato; perciocchè esso determina la posizione della superficie nello spazio.

30. Chiamo *Parametri* le due rette date di grandezza; perciocchè esse determinano la grandezza della circonferenza generatrice in ogni sua posizione, e quindi la superficie in grandezza.

31. Dati i due Parametri soltanto, restano determinate in grandezza le circonferenze basi dei due cilindri retti che si toccano per di dentro; ma non il loro piano, nè i loro centri.

Digitized by Google

32. Dati i Parametri e la Retta Direttrice, restano determinate in grandezza le circonferenze basi dei due cilindri retti che si toccano per di dentro, la giacitura del loro piano che sarà perpendicolare alla retta direttrice; ma non il piano individuato: nè il centro delle dette circonferenze, li quali entrambi varieranno di posizione al variare di ciascun piano; e quello della circonferenza maggiore potrà variare ancora su ciascuno degli infiniti piani normali alla Retta Direttrice, che possono tutti essere piani delle dette circonferenze.

33. Che se sia dato in oltre il Punto Determinatore, verrà determinato con esso un individuato dei detti infiniti piani normali alla Retta Direttrice; ed in oltre la posizione dei centri delle circonferenze direttrici dei cilindri, ossia delle loro basi, li quali staranno sulla congiungente il Punto Determinatore col punto d' incontro del piano condotto per esso normale alla Retta Direttrice, colla Direttrice istessa: e l' uno è questa intersezione medesima, l' altro un punto da esso distante per la differenza dei Parametri.

34. E la definita generazione (10) esclude l' altra superficie che giacendo al disotto del piano condotto pel Punto Determinatore normale alla Retta Direttrice (22) potrebbe sola ammettere simili determinanti.

In prosieguo quando dirò semplicemente superficie, intenderò parlare di quella la di cui generazione è data per la proposizione seconda; e quando dirò determinanti della superficie intenderò dire la Retta Direttrice, il Punto Determinatore, ed i due Parametri.

Digitized by Google

COROLLARIO II.

35. Dati i due Parametri, la Retta Direttrice, ed il Punto Determinatore; è data la superficie di grandezza e di posizione.

E poichè per una superficie individuata, una sola può essere la curva dei centri, una sola la curva di contatto della superficie col cilindro minore, ed una sola la linea di contatto col piano base dei cilindri, i Parametri della superficie sono Parametri delle dette tre curve: e queste sono date di posizione, date che siano la Retta Direttrice ed il Punto Determinatore.

COROLLARIO III.

36. La Retta Direttrice, il Punto Determinatore ed i Parametri sono dunque comuni tanto alla superficie, quanto alla linea dei centri ed alle linee di contatto col cilindro minore e col piano delle basi dei cilindri.

Per la qual cosa date queste può aversi come data la superficie. E può questa aversi come generata da una circonferenza di circolo moventesi col suo centro sulla curva dei centri, e colla periferia appoggiandosi alle due curve di contatto.

SCOLIO 2.°

37. Che la superficie possa aversi ancora, come generata da una circonferenza di circolo moventesi col suo centro sulla curva nei centri, e colla periferia appoggiandosi alle due curve di contatto, emerge chiarissimo (36) dal fin qui detto.

E non è difficile il concepire, come può determinarsi la circonferenza generatrice corrispondente ad ogni punto della curva dei centri.

Esistano nello spazio le dette tre curve; e vogliasi determinare la generatrice corrispondente ad un'individuato punto della curva dei centri.

Da un tal punto intendasi condotta una perpendicolare al piano della curva di contatto della superficie col piano delle basi dei cilindri; e s'immagini una sfera avente quel punto come centro, e la lunghezza di questa perpendicolare come raggio. La sfera incontrerà l'altra curva di contatto; e la circonferenza di quel suo circolo grande che passa per un tal punto è una generatrice della superficie.

SCOLIO 3.°

38. Supponendo che la medesima cosa (37) avesse luogo per tutti gli infiniti punti della curva dei centri, si avrà una serie infinita di sfere aventi tutte su di loro la generatrice della superficie nelle sue infinite posizioni.

Onde potrebbe aversi questa, come generata dal circolo massimo di una sfera condizionata a toccare un piano ed a percorrere col suo centro la curva dei centri; ed il quale circolo massimo passando pel punto di contatto della sfera col piano, si appoggiasse in oltre alla curva di contatto della superficie col cilindro minore.

Consideriamo due posizioni consecutive della sfera. Cotali due sfere si taglieranno, la loro intersezione sarà una circonferenza di circolo, col piano normale alla retta che unisce i centri delle sfere. Dunque la superficie non può aversi come generata da quelle sfere.

Digitized by Google

Siano altre sfere qualunque che la generino: e consideriamone due consecutive. La loro intersezione sarebbe pure la circonferenza di un circolo normale alla retta che ne unisce i centri. Ma una tal retta è un elemento della curva, che sarebbe curva dei centri delle sfere generatrici. Dunque perchè tali sfere generassero la superficie, dovrebbero i loro centri generare una curva piana e parallela al piano delle basi dei cilindri: perciocchè le circonferenze generatrici della superficie sono tutte su piani perpendicolari al detto piano delle basi dei cilindri.

E perchè la superficie tocca il piano delle basi dei cilindri secondo il circolo base del cilindro maggiore; tutte quelle sfere dovrebbero toccarlo del pari. Dovrebbero dunque avere ugual raggio. Dunque le caratteristiche della superficie inviluppo, da esse sfere generata, sarebbero tutte eguali tra loro.

Dunque la superficie non può aversi come generata da una sfera, nè è inviluppo di sfere: essa dunque comunque abbia per generatrice una circonferenza di circolo, non è del genere delle superficie canali. A volerla classificare tra alcun genere di superficie di cui alcuna è stata considerata dai geometri, può dirsi anulare: ed è un caso più generale della superficie anulare della quale si tratta in alcuni trattati di geometria descrittiva, e che entra nella composizione di quel membro di architettura che dicesi toro. Di fatto suppongasi che essendo dissuguali i diametri delle basi dei due cilindri che regolano il movimento e la grandezza della circonferenza generatrice della superficie, i loro centri si vadano avvicinando: il nodo della superficie (15) si scioglierà; e quando i centri coincideranno, la circonferenza generatrice non sarà più di gran-

dezza variabile; e la superficie si trasformerà nell' anulare suddetta che entra nella composizione del toro.

39. La superficie di che si tratta dunque appartiene ad una famiglia delle anulari: la quale famiglia può dirsi comprenderne sei casi o sotto varietà; cioè

a generatrice di grandezza costante;

a generatrice di grandezza variabile ad una foglia non annodata;

a generatrice di grandezza variabile ad una foglia annodata;

a generatrice di grandezza variabile a linea doppia e con due nodi;

a generatrice di grandezza variabile a linea doppia con un nodo;

a generatrice di grandezza variabile a linea doppia non annodata (*).

SCOLIO 4.°

40. La superficie di che si tratta non è inviluppo di sfere (38); ma nonpertanto potrebbesi considerare come inviluppo di una superficie rigata non sviluppabile.

Ogni circonferenza generatrice tocca il piano delle basi dei cilindri. Tutti cotali punti di contatto sono punti omologhi: ed a partire da questi, tutti i punti delle circonferenze generatrici corrispondenti ad archi di uguale lunghezza angolare sono omologhi. Del pari per ciascuna serie di punti omologhi adunque s' intendano condotte le

(*) Per una generale classificazione di tutte le *superficie anulari*, di tutte quelle generate cioè da circonferenze di circolo, veggasi il *Prolegomeno alle mie Ricerche Analitiche sulle superficie anulari*. E secondo la classificazione quivi fatta, la superficie di che si tratta è di quelle di seconda classe.

Digitized by Google

tangenti alle circonferenze generatrici. Tutte cotali tangenti, infinite di numero, per quante sono le circonferenze generatrici, costituiscono una superficie rigata: ed a ciascuna serie di punti omologhi suddetti, corrisponderà una superficie rigata individuata. E poichè tutte le loro generatrici toccano la superficie; tutte cotali superficie rigate la toccheranno del pari. E ne saranno linee di contatto quelle costituite dai punti omologhi delle infinite circonferenze generatrici, corrispondenti ad archi di uguale lunghezza angolare a cominciare dal detto loro punto di contatto col piano delle basi dei cilindri.

La superficie adunque può aversi come inviluppo di cotali superficie rigate; e la linea di contatto di ciascuna di esse colla superficie è la caratteristica dell'inviluppo. Conciosiacosacchè nel limite le curve di contatto di due superficie rigate inviluppate consecutive, colla superficie, si confondono colla intersezione di esse superficie rigate consecutive.

La superficie dunque può aversi eziandio come generata dalla detta curva dei punti omologhi delle circonferenze generatrici. Le due curve di contatto della superficie col cilindro minore, e col piano delle basi dei cilindri sono caratteristiche particolari della superficie, ossia curve generatrici di questa seconda generazione; ed il cilindro minore, ed il piano delle basi dei cilindri sono trasformazioni della superficie rigata inviluppata, nelle sue posizioni corrispondenti a cotali due caratteristiche.

Digitized by Google

PROPOSIZIONE QUARTA.

Dato i determinanti della superficie, ed un punto sul piano orizzontale di projezione: riconoscere se quel punto è projezione di un punto della curva dei centri; ed essendolo determinare il corrispondente punto in projezione verticale.

TAV. I. 41. Pel punto determinatore (29) conduco un piano normale alla retta direttrice (28); e scelgo un tal piano per piano orizzontale.

42. Sia (R, pr) la retta direttrice, D il punto determinatore, le rette M ed N in lunghezza i parametri. E sia P un punto dato sul piano orizzontale di projezione.

Si domanda

1.° Se il punto P è projezione di un punto della curva dei centri.

2.° Essendo P la projezione orizzontale di un punto della curva dei centri, determinare il punto corrispondente in projezione verticale.

43. Pei punti D, R conduco la retta DR, e da R verso E taglio la parte RC eguale alla differenza dei parametri.

Se il punto dato P dista dal punto C pel parametro maggiore M, il punto P può essere projezione orizzontale di un punto della curva de' centri: se no non può esserlo.

Perciocchè la curva dei centri giace tutta su di un cilindro retto (10) che ha i lati paralleli alla retta direttrice, e per base una circonferenza di circolo di centro C e di raggio uguale al parametro maggiore M.

Digitized by Google

44. Sia dunque P projezione orizzontale di un punto della curva dei centri.

Pel punto P innalzo la indefinita Pp perpendicolare alla linea di terra YY', pei punti R e P conduco la retta RP, e da R verso P prendo RF uguale al parametro minore N, e col centro π intersezione della Pp colla YY', e raggio uguale PF, parte della RP, intercetta tra il punto determinato F ed il punto dato P, descrivo il semicircolo $p\varphi p'$. I punti p, p' intersezione del semicircolo $p'\varphi p$ colla Pp sono i punti in projezione verticale corrispondenti al punto P in projezione orizzontale. — Il primo appartiene alla curva dei centri della superficie superiore (21) al piano $Y'Y$, il secondo alla curva dei centri della superficie sottoposta al piano $Y'Y$.

Per costruzione è πp uguale a PF. Ma F è sulla circonferenza di centro R e raggio il parametro minore N. Dunque il punto p è alto sul piano $Y'Y$ per la distanza dei punti F, P, li quali sono projezioni dei lati dei due cilindri aventi per direttrici circonferenze descritte coi centri R, C e coi raggi N, ed M, e per generatrici rette parallele alla retta direttrice $(R, \varphi r)$ della superficie.

Dunque il punto (P, p) è punto della curva dei centri della superficie superiore al piano $Y'Y$.

E similmente il punto (P, p') è punto della curva dei centri dell'altra superficie ad essa simmetrica, inferiore al piano $Y'Y$.

Digitized by Google

PROPOSIZIONE QUINTA.

Dato i determinanti della superficie, ed un punto sul piano verticale di projezione: riconoscere se quel punto può essere projezione verticale di un punto della curva dei centri; ed essendolo determinare il corrispondente in projezione orizzontale.

TAV. II. 45. Pel punto determinatore (29) conduco un piano normale alla retta direttrice (28) della superficie; ed assumo un tal piano per piano orizzontale di projezione.

Sia $(R, \rho r)$ la retta direttrice della superficie, D il punto determinatore, M, N i parametri della superficie, p il punto dato.

Si domanda

1.° Se il punto p è un punto della projezione verticale della curva dei centri.

2.° Essendo p un punto della projezione verticale della curva dei centri, il punto corrispondente in projezione orizzontale.

46. Col punto R come centro, e col raggio uguale il parametro minore N descrivo la circonferenza di circolo $ABFG$. Dal punto dato p calo la perpendicolare $p\pi$ alla linea di terra $Y'Y$, col centro π ed il raggio πp descrivo il semicircolo $\varphi' p \varphi$, dai punti φ, φ' di sua intersezione colla retta $Y'Y$, tiro le φB, $\varphi' B'$ perpendicolari alla $Y'Y$.

Se una di tali rette, od entrambe incontrano la circonferenza $ABFG$, il punto dato p è punto della projezione verticale della curva dei centri.

Sia dunque p un punto della projezione verticale della curva dei centri.

Digitized by Google

47. Per determinare in projezione orizzontale il punto corrispondente al punto p, pei punti D, R, conduco la retta indefinita DRE, e da R verso E taglio la RC eguale alla differenza dei parametri M, N, e col centro C e raggio il parametro maggiore descrivo la circonferenza $AQPEA$. Dal dato punto p abbasso indefinitamente la pP perpendicolare alla $Y'Y$. Uno dei punti P, Q, ove la Pp è tagliata dalla circonferenza $AQPA$ descritta, sarà la projezione orizzontale della curva dei centri corrispondente al punto p.

E per determinare quale di tali punti è il richiesto coi centri Q, P e col raggio uguale a πp, ossia $\pi\varphi$, ovvero Pf, Qf' descrivo due circonferenze. Il punto P che è centro della circonferenza che tocca l' altra $ABFGA$ descritta col centro R, e col raggio uguale al parametro minore N, è il punto domandato: projezione orizzontale di quel punto della curva dei centri che ha per projezione verticale il punto dato p.

48. Sia P il punto d'intersezione della retta pP colla circonferenza $AQPEA$ il quale è centro della circonferenza di raggio πp, la quale tocca l'altra circonferenza $ABFGA$. Se si conduca la PR, la porzione PF di una tal retta, intercetta tra le circonferenze $ABFG$, $AQPE$ sarà pari all' altezza del centro (P, p) della circonferenza generatrice della superficie, il di cui piano è projettato in PR. Per P s'intenda condotta la PH parellela alla $Y'Y$, e tagliato sopra PH la Pf uguale a PF. Essendo il circolo di centro P e di raggio PF tangente alla circonferenza $ABFGA$; se per f si conduca la $f\varphi$ perpendicolare a Pf, la $f\varphi$ taglierà la circonferenza $ABFG$. Ma PF è uguale a πp: dunque se una delle rette φB, $\varphi' B'$ condotte pei punti φ, e φ' intersezione del circolo di centro π e di raggio πp colla

Digitized by Google

linea di terra $Y'Y$, taglia la circonferenza $ABFG$, il dato punto p è projezione verticale di un punto della curva dei centri.

Essendo p projezione verticale di un punto della curva dei centri, è chiaro dovere essere P la projezione orizzontale del punto della curva dei centri avente per sua projezione verticale il punto p; perciocchè è dimostrato (11) essere la curva dei centri su di un cilindro retto avente la circonferenza $AQPEA$ per base o direttrice, e le generatrici parallele alla retta $(R, \rho r)$.

SCOLIO

Dalle due proposizioni precedenti emerge facilissima la costruzione della curva dei centri.

TAV. III. 49. E poichè la superficie è simmetrica (16) intorno il piano diametrale, che è un piano condotto pel punto determinatore, e per la retta direttrice; per avere una più elegante forma nella rappresentazione della curva per le sue projezioni; ritenendo il medesimo piano orizzontale delle due proposizioni precedenti (45), assumo per piano verticale di projezione un piano perpendicolare non solo al piano orizzontale, ma ancora al piano diametrale. La intersezione di questo piano col piano verticale di projezione sarà un' asse della projezione verticale della curva dei centri, la quale projezione sarà simmetrica intorno a quell' asse.

50. Sia D il punto determinatore, R la projezione orizzontale della direttrice, M, N i parametri maggiore e minore della superficie.

Pei punti D ed R conduco la retta DRG: è DG la projezione orizzontale del piano diametrale. Conduco la $Y'Y$ perpendicolare alla DG: è $Y'Y$ la linea di terra.

Digitized by Google

Da R verso G sopra DG taglio la RC uguale alla differenza del parametro maggiore M sul minore N, e col centro C ed il raggio uguale M descrivo la circonferenza $ATGT'A$: è questa la projezione orizzontale della curva dei centri. Per costruirne la projezione verticale col centro R e raggio il parametro minore N descrivo la circonferenza $AF'''BEA$, la divido in un pari numero di parti uguali, AF, FF', $F'F''$, $F''F'''$, . . . , pei punti di divisione conduco i suoi raggi RA, RF, RF', RF'', RF''', che prolungo sino ad incontrare la projezione orizzontale $ATGA$ della curva. Pei punti d' incontro elevo le perpendicolari Ap, Pp, $P'p'$, $P''p''$, $P'''p'''$, . . . all' $Y'Y$. Su tali perpendicolari saranno i punti della projezione verticale corrispondenti ai punti A, F, F', F'', . . . della projezione orizzontale; e ciascuno distante dalla $Y'Y$ per le parti PF, $P'F'$, $P''F''$, . . . dei raggi prolungati, intercette tra le circonferenze $AF'''BEA$, $ATGT'A$, e che passano rispettivamente pei punti P, P', P'', . . . Prendo dunque sulle rette Pp, $P'p'$, $P''p''$, . . . le parti πp, $\pi' p'$, $\pi'' p''$, . . . rispettivamente eguali alle FP, $F'P'$, $F''P''$, . . . ; e sono p, p', p'', p''', . . . punti della curva.

51. Essendo per costruzione RC uguale alla differenza delli parametri M ed N, RA uguale al parametro minore, e CA uguale al maggiore, le due circonferenze si toccano per di dentro nel punto A della DG. Dunque il punto della projezione verticale corrispondente al punto G della circonferenza $ATGT'A$, che è sulla DG diametralmente opposto al punto di contatto A, ha la massima elevazione sulla retta $Y'Y$, ed i punti contigui hanno minore elevazione. Dunque la projezione verticale della curva dei centri

Digitized by Google

ha un' ordinata massima uguale a BG. Dunque a partire dal punto ρ si tagli la ρr uguale alla BG, e per r si conduca una retta parallela all' $Y'Y$, una tal retta sarà tangente della curva, la quale sarà tutta al disotto di essa. Ed in oltre la curva al punto r rivolgerà concavità all' $Y'Y$.

Per la medesima ragione il punto della projezione verticale della curva, corrispondente al punto A della circonferenza $ATGT''A$ che è sulla DG al punto di contatto delle due circonferenze $AF''F^{IV}BA$, $ATGT'A$, avrà la minima elevazione sulla $Y'Y$: e sarà il punto ρ: ed i punti contigui saranno egualmente elevati sulla retta medesima $Y'Y$. Dunque la curva projezione verticale della curva dei centri toccherà la retta $Y'Y$ al punto ρ, ed avrà tutti i suoi punti al di sopra di essa. Ed in oltre nel punto ρ rivolgerà convessità alla $Y'Y$.

Conduco le rette Tt, $T''t'$ tangenti alla circonferenza $ATGT'A$, e perpendicolari alla $Y'Y$. Tali rette sono projezioni di due piani tangenti al cilindro projettato in $ATGT'A$. Ma la curva dei centri è intorno ad un tal cilindro. Dunque le rette Tt, $T''t'$, saranno tangenti alla projezione verticale della curva, ed ai punti corrispondenti ai punti di contatto T, T'' delle rette Tt, $T''t'$ colla circonferenza $ATGT'A$. Ma tali punti di contatto sono i più lontani dalla retta DG; ed i punti contigui ne sono meno lontani. Dunque la projezione verticale della curva dei centri, ai suoi punti di contatto colle rette Tt, $T''t'$, volge convessità a tali rette; ed è tra esse compresa.

Il rettangolo $\tau\tau't't$ adunque sarà circoscritto alla curva projezione verticale della curva dei centri.

Per determinare i punti di contatto delle Tt, $T''t'$ colla projezione verticale della curva dei centri, dai punti, T, T''

di contatto di esse colla circonferenza $ATGT'A$ al punto R conduco le rette, RT, RT'; e dai punti τ, τ', verso t, t' taglio le $\tau\alpha$, $\tau'\alpha'$ uguali alla parte $T\varphi$, o $T'\varphi'$ delle TR, $T'R$ intercette tra le due circonferenze $AF^{IV}BEA$, $ATGT'A$. I punti α, α' sono i punti di contatto delle Tt, $T't'$ colla projezione verticale della curva dei centri; e saranno corrispondenti all'ordinata massima sull'asse (49) ρr.

Costrutta la curva nel modo suddetto prende la forma rappresentata nel disegno.

52. Le rette $Y'Y$, tt' sono projezioni di due piani orizzontali che toccheranno la curva dei centri nello spazio nei punti (A, ρ), (G, r). Se dunque la curva dei centri si projetti su qualunque altro piano perpendicolare all'assunto piano orizzontale di projezione, la sua projezione sul nuovo piano, toccherà le rette intersezioni di esso coi piani tt', $Y'Y$; e toccherà del pari due rette perpendicolari alla linea di terra del nuovo piano verticale di projezione, e tangenti alla circonferenza $ATGT'A$. I punti di contatto colle due prime rette staranno sempre, l'uno sulla intersezione della linea di terra colla retta ad essa perpendicolare calata da A, l'altra sulla intersezione della retta condotta paralellamente alla linea di terra ed alta da essa per ρr, colla perpendicolare ad essa, elevata da G; e gli altri due punti sur esse rette tangenti alla circonferenza $ATGT'A$, e tanto elevati sulla linea di terra, per quanto la parte dei raggi condotti dal punto R ai punti di contatto della circonferenza $ATGT'A$ con esse rette, intercette tra questa circonferenza e l'altra $AF'''BEA$. Ma cotali quattro punti di contatto potranno trasformarsi in punti limiti o di regresso della projezione della curva: e ciò ha luogo quando due dei detti quattro punti di contatto coincidano; il qual caso si verifica,

Digitized by Google

quando il nuovo piano di projezione è parallelo al piano diametrale Dr.

Per costruire questa terza projezione della curva, per Y' conduco la retta $X'Y'X$ parallela alla rD; e prendo la $X'X$ per linea di terra. Dal punto Y', intersezione delle due linee di terra sulla $Y'Y$, prendo le parti Y'o, Y'1, Y'2, Y'3, Y'4, Y'5, Y'6, Y'7, uguali rispettivamente alle elevazioni πp, $\pi' p'$, $\pi'' p''$, $\pi''' p'''$, $\pi^{IV} p^{IV}$ . . . ρr, dalla linea di terra $Y'Y$ dei determinati punti della projezione della curva. Dai punti 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, tiro delle rette parallele all' $Y'X$; e delle rette parallele alla YY' tiro pei punti A, P, P', P'', P''', P^{IV}. . . . G della circonferenza $ATGT'A$, corrispondenti ai determinati punti ρ, p, p', p'', p'''. . . . r della projezione verticale della curva. Le intersezioni a due a due delle dette parallele menate per punti di ugual sede danno i punti a, p, $p_{,}$, $p_{,,}$, $p_{,,,}$, p_{IV}, p_{V}, p_{VI}, g della nuova projezione della curva dei centri sul piano di projezione parallelo al piano diametrale.

In questo caso le due rette intersezioni dei due piani $Y'Y$, tt', col novello piano di projezioni sono le $gt_{,}$, $Y'X$; e le due rette $At_{,}$, Gg sono le due perpendicolari alla novella linea di terra $Y'X$, e tangenti ad un tempo alla circonferenza $ATGT'A$. Le quattro rette $Y'X$, $at_{,}$, $t_{,}g$, $g\gamma$ limitano la projezione della curva, ma non però la toccano. Se si consideri che il punto g è punto comune alle due rette $t_{,}g$, Gg, ed alto sopra $Y'X$ per ρr, si vede che quivi ha luogo la coincidenza di due dei quattro punti di contatto: e si vede similmente che al punto a ha luogo l' altra coincidenza. E questo è il caso detto di sopra: e di fatto i punti g, a, sono punti di arresto della curva.

Digitized by Google

Se si sviluppi il semicilindro ATG, sul piano ad esso tangente Tt, e si costruisca la semicurva dei centri trasformata sullo sviluppo del cilindro, si renderà palese il carattere tangenziale della curva coi piani limiti $X'X$, $gt_{\prime}$.

Per costruire la detta trasformata sullo sviluppo del cilindro, pel punto T inalzo $T\tau_{\prime}$ perpendicolare alla $X'X$, ed al di sotto della $T\tau_{\prime}$, sulle rette parallele alla $X'X$, a partire da essa $T\tau_{\prime}$, taglio le $4_{\prime}s_{\prime\prime\prime}$, $3_{\prime}s_{\prime\prime\prime}$, $2_{\prime}s_{\prime\prime}$, $1_{\prime}s_{\prime}$, QS rispettivamente uguali alla lunghezza delli archi $TP^{\prime\prime\prime}$, TP''', TP'', TP', TP, TA; ed al di sopra della medesima $T\tau_{\prime}$, su le altre rette parallele alla $X'X$, a partire da T, le $5_{\prime}s_{\prime}$, $6_{\prime}s_{\prime\prime}$, $7_{\prime}s_{\prime\prime\prime}$ uguali agli archi $TP^{\prime}$, $TP^{\prime\prime}$, TG. I punti S, $s_{\prime}$, $s_{\prime\prime}$, $s_{\prime\prime\prime}$, ... $s_{\prime\prime\prime\prime}$, sono punti della detta trasformata della curva, la quale prende la forma delineata con puntini nel disegno, e si manifesta tangente alle due rette limiti $t_{\prime}s_{\prime\prime\prime\prime}$, $X'X$.

Digitized by Google

PROPOSIZIONE SESTA.

Dato i determinanti della superficie, ed un punto sul piano orizzontale di projezione; riconoscere se quel punto è projezione di un punto della superficie; ed essendolo, determinare il corrispondente punto in projezione verticale.

53. Pel punto determinatore intendo condotto un piano normale alla retta direttrice; ed assumo un tal piano per piano orizzontale di projezione.

TAV. IV. Sia D il punto determinatore, (R, pr) la retta direttrice, le M, N, in grandezza i due parametri: e sia P un punto sul piano orizzontale di projezione.

1.° Si domanda se il punto dato P può essere projezione di un punto della superficie nello spazio.

2.° Essendolo, quale ne sia il corrispondente punto in projezione verticale.

54. Pel punto determinatore D, e pel punto R projezione della retta direttrice, conduco la retta indefinita DRV e da R verso V taglio la RC uguale alla differenza del parametro maggiore M sul minore N. Pel punto dato P, e per l'altro R, projezione della direttrice, tiro la RE, e sopra una tal retta segno i punti B, F, ove sarebbe tagliata dalle circonferenze di centri R e C rispettivamente di raggi N ed M; e da F verso E taglio la FE uguale alla FB. Se il punto dato P sarà tra i punti B ed E, sarà projezione orizzontale di un punto della superficie nello spazio. E qui due casi possono darsi; o che il punto P è tra i punti F ed E, o che in vece stia tra i punti

Digitized by Google

F e B, come sarebbe P': nel primo caso sarà uopo compire tutte le operazioni, nel secondo caso si farà a meno di tagliare la FE uguale alla BF.

Stia dunque il punto dato P tra li due punti B ed E determinati come ho detto. Un tal punto sarà projezione orizzontale di un punto della superficie. Di fatto essendo per costruzione il punto F projezione di un punto della curva dei centri, perciocchè è sulla circonferenza di centro C e di raggio il parametro maggiore M(43); ed essendo B projezione del punto di contatto della superficie col cilindro minore che ne guida la generazione, perciò ch'è sulla circonferenza di centro R e di raggio il parametro minore N(20); è FB il raggio della individuata circonferenza generatrice della superficie, la quale giace sul piano projettato in RE: e quindi la porzione BE della RE è la projezione orizzontale di essa individuata circonferenza generatrice. Ed il punto dato P trovandosi appunto sur una tale porzione BE di retta, può essere projezione orizzontale di un punto nello spazio della individuata circonferenza generatrice medesima; tutt'i punti della quale, essendo punti della superficie, potrà il punto dato P essere projezione orizzontale di un punto della superficie.

55. Sia dunque P projezione orizzontale di un punto della superficie: e vogliasene determinare il corrispondente in projezione verticale.

Dal punto F tiro la Ff perpendicolare alla linea di terra $Y'Y$, e su di essa Ff segno il punto f alto sulla $Y'Y$ per φf uguale alla FB; e col centro f ed il raggio $f\varphi$ descrivo la circonferenza $\varphi\pi'\pi$. Dal medesimo punto F tiro la FQ parallela alla $Y'Y$, ed a partire da F taglio la FQ uguale alla FP; e per Q innalzo la $Q\pi$

Digitized by Google

perpendicolare alla $Y'Y$. Pei punti π, π' d'intersezione della $Q\pi$ colla circonferenza $\varphi\pi'\pi\varphi$ conduco le orizzontali $p\pi$, $p'\pi'$; e pel punto dato P innalzo la verticale Pp. I punti p, p' d'intersezione della verticale Pp colle orizzontali πp, $\pi' p'$ sono le projezioni verticali di quei punti della superficie dei quali il punto dato P è la projezione orizzontale.

Di fatto sieno p, p' projezioni verticali di quei punti della superficie, dei quali P è projezione orizzontale. Essi staranno sulla individuata circonferenza generatrice della superficie, di cui è BE la projezione orizzontale, ed F quella del suo centro. Rota il cerchio di una tale individuata cinconferenza intorno al suo diametro projettato in F, e per tanto da situarsi parallelo al piano verticale di projezione: la sua projezione orizzontale, dopo una tal rotazione starà sulla FQ, e la sua projezione verticale, dopo la rotazione medesima sarà (44) la circonferenza $\varphi\pi'\pi\varphi$: e durante la rotazione medesima il punto P percorrerà l'arco PQ, ed i suoi corrispondenti p, p' le orizzontali $p\pi$, $p'\pi'$. Onde sul piano orizzontale il punto Q, e sul piano verticale i punti π, π', saranno le projezioni dei punti (P, p), (P, p') che sono projettati in P ed appartengono alla circonferenza projettata in BE, dopo la detta rotazione del circolo sulla di cui circonferenza essi sono. Dunque i punti p, p' sono in projezione verticale i punti corrispondenti a quei punti della superficie, li quali sono orizzontalmente projettati nel dato punto P.

Digitized by Google

LEMMA.

Dato i determinanti della superficie, ed un piano parallelo alla retta direttrice: costruire la curva d'intersezione della superficie col piano.

56. Pel punto determinatore intendo condotto un piano perpendicolare alla direttrice, ed assumo un tal piano per piano orizzontale di projezione: il dato piano secante sarà normale al piano orizzontale di projezione. Il piano verticale di projezione risultando parallelo alla direttrice, l'assumo in oltre normale al piano secante: sarà questo normale alla linea di terra.

Sia dunque D il punto determinatore, (R, pr) la retta direttrice, le rette M, N in grandezza i parametri, e sia ph' il piano secante. TAV. V.

Si voglia costruire la intersezione della superficie di parametri M ed N, di punto determinatore D, e direttrice (R, pr) col piano dato ph'.

57. Pei punti D, R tiro la indefinita DV; e da R verso V taglio la RC uguale alla differenza del parametro maggiore M sul minore N. Coi centri R e C, e coi raggi rispettivamente uguali al parametro minore N ed al maggiore M descrivo le circonferenze AkH_iLA, $Ab'BA$. Dal punto R tiro la RH' per modo che risulti KB' uguale a $B'H'$; e pel medesimo punto R e pel punto H' intersezione della Ah_iKLA colla ph', la RB_i. Fra tali due rette RH', RB_i tiro per R un numero arbitrario di raggi; sia RB uno di questi. Pel suo punto d'intersezione B colla circonferenza maggiore $Ab'B_iB'A$ elevo la perpendicolare BG alla

Digitized by Google

RB; su di essa a partire da *B* taglio la *BG* uguale a *BF*, e col centro *G* e raggio *GB* descrivo la circonferenza *BDII,B*, e pel punto d'intersezione *H* del raggio *RB* colla *ph'* tiro le due rette *HI*, *HS*, perpendicolari, la prima alla *BR*, e la seconda alla *h'p*. La *HI* essendo parallela alla *BG*, incontrerà la circonferenza *BDII,B* di centro *G*: ed i punti *I,I,* ne sono i punti d'incontro. Sulla *HS* prendo le parti *HS*, *HS,* rispettivamente uguali alle *HI*, *HI,*. Sono *S*, *S,* punti della curva d'intersezione della superficie col piano *ph'*, costrutta sul piano orizzontale di projezione.

Di fatto il raggio *RB* è projezione di un piano, che taglia il piano dato *ph'* secondo una retta, e la data superficie secondo una individuata delle sue circonferenze generatrici (10,18); e se il piano *RB* s'intenda che roti intorno alla traccia *BR* sino a mettersi sul piano orizzontale di projezione; essendo quivi giunto, il centro della individuata generatrice che è sul piano *RB* si troverà in *G*, punto distante dalla *RB* per *BF*, e giacente sulla *BG* perpendicolare a *BR*; e la retta intersezione del piano *RB* coll'altro *ph'* si troverà nella indefinita *HI* perpendicolare alla traccia *RB*. E poichè il piano *ph'* e l'altro *RB* tagliano la superficie, la retta di loro intersezione debbe incontrarla; ed in punti che sono nella intersezione, di ciascuno di essi piani colla superficie. Ma il piano *RB* taglia la superficie secondo una delle circonferenze generatrici; dunque i punti d'incontro della detta retta (intersezione dei piani *RB*, *ph'*) con tale generatrice; sono ad un tempo punti d'intersezione del piano *ph'* colla superficie. Ma la generatrice sul piano *RB*, dopo la detta sua rotazione, è la circonferenza *BDII,B*, e la intersezione dei due piani *RB*, *ph'* è allora la retta *HI*. Dunque i punti *I,I,* d'in-

Digitized by Google

tersezione di essa retta, colla circonferenza BDI_1B, corrispondono a punti d'intersezione del piano ph' colla superficie. Dunque due punti projettati in H ed alti sul piano orizzontale di projezione, l'uno per HI, e l'altro per HI_1, sono punti d'intersezione della superficie data, col dato piano secante ph'. Roti ora il dato piano ph' intorno alla sua traccia orizzontale p_1h_1; e si ponga sul piano orizzontale di projezione. I detti due punti d'intersezione projettati in H si troveranno, dopo la rotazione del piano secante ph', sulla perpendicolare HS ad $h'p_1$, eretta per H, e distanti dal punto H, l'uno per HS uguale ad HI, e l'altra per HS_1 uguale ad HI_1. Dunque i costrutti punti S, S_1 sono punti della curva d'intersezione del piano dato ph' colla superficie, e costrutta sul piano orizzontale di projezione.

E come ho operato rispetto al raggio RB, così operando rispetto a tutti gli altri raggi condotti per R tra li due RB', RB_1, costruisco i diversi punti della dimandata intersezione. La quale così costrutta è la $LS_1L'\pi'\pi SL$.

58. La costruzione di tutti i punti della curva della intersezione di che si tratta dipende dall'incontro di una retta HI perpendicolare al raggio RB, colla circonferenza di centro G e raggio uguale BF. Tra le rette, come la HI, ve ne sono di quelle tanto distanti dall'altre, come la BG, per quanto è il raggio BG. E cotali rette sono le H_1l, $H'l'$; perciocchè B_1G' è uguale a B_1H_1 e pel punto H_1 è eretta la H_1l; ed è $B'G'$ uguale $B'K'$, e per costruzione si è tirato in modo il raggio RB' che è KB' uguale a $B'H'$. Però le rette H_1l, $H'l'$ non tagliano le rispettive circonferenze $B_1D_1B_1$, $B'l'D'B'$, ma le toccano nei punti l, l'. Dunque per ciascuno dei piani RB_1, RB', vi corrisponde un sol punto, in vece

che corrispondervene due, come li S, $S_{,}$ in riguardo al piano RB: cioè; al piano $RB_{,}$ corrisponde il punto L, ed all'altro piano RB' corrisponde l'altro L' e le rette $H_{,}L$, $H'L'$ toccano la curva $\pi SLS_{,}L'\pi'\pi$ nei punti L,L', e la limitano nel senso $p_{,}h'$.

Egli è perciò che ho detto (57) tirare i diversi raggi, come RB, tra i due $RB_{,}$, RB', che passano pei punti H', $H_{,}$ della traccia del piano; li quali punti sono in sostanza la intersezione della traccia $p_{,}h'$ del dato piano coi limiti della projezione orizzontale della superficie.

59. La traccia $p_{,}h'$ del piano secante taglia di nuovo le due circonferenze di centro R,C e di raggio i parametri minori N e maggiore M al disotto del centro R. Dal punto R dunque tiro i raggi $Rh_{,}$, Rh', dei quali il primo passi per la intersezione $h_{,}$ della traccia $p_{,}h'$ colla circonferenza di raggio il parametro minore N, e la seconda pel punto h' tale che la parte $h'b'$ della Rh' sia uguale alla $b'k$. E tra cosiffatti due raggi tirando una serie di altri raggi pel punto R, ed operando per ciascuno, come per la RB, si avrà un altro ramo della curva d'intersezione del piano ph' colla superficie.

COROLLARIO

60. Si supponga che il piano secante ph' camini parallelamente a sè stesso nel senso $Y'Y$. La parte $H_{,}h_{,}$ della sua traccia $p_{,}h'$ anderà diminuendo in lunghezza, ed i punti $H_{,}$, $h_{,}$ si anderanno avvicinando: e ad un tempo i punti $H_{,}$, H', ed $h_{,}$, h' si anderanno allontanando. Movendosi dunque in siffatta guisa il piano, i due rami della curva si anderanno avvicinando tra loro, e ciascuno allungando.

Digitized by Google

Quando la *ph'* tocca la circonferenza *Ah,H,KA* i due rami si uniranno per via di un nodo nel punto corrispondente al punto di contatto. Quando la *ph'* taglierà la sola circonferenza maggiore, il nodo si scioglierà e la curva di intersezione avrà un sol ramo.

Se il piano *ph'* si muove in senso opposto, le medesime circostanze avran luogo; se non che, passando la sua traccia *ph'* pel punto *A* di contatto delle due circonferenze di centro *R*, e *C*, e di raggio *N* ed *M*, uno dei due rami della curva si ridurrà in un punto.

61. La curva di che si tratta dunque avrà o due rami chiusi e staccati; od un ramo chiuso, con un punto isolato; od un ramo chiuso ed annodato; od un sol ramo chiuso e senza nodo.

PROPOSIZIONE SETTIMA

Dati i determinanti della superficie ed un punto sul piano verticale di projezione; riconoscere se quel punto è projezione di un punto della superficie; ed essendolo, determinare il corrispondente punto in projezione orizzontale.

62. Assumo per piano orizzontale di projezione un piano pel punto determinatore perpendicolare alla retta direttrice. E sia *D* il punto determinatore, (*R*, *pr*) la retta direttrice, le rette *M*, *N*, in grandezza i parametri maggiore e minore; e sia *p* il punto dato in projezione verticale. TAV. V.

Si domanda:

1.° Se il punto *p* dato in projezione verticale, può essere la projezione verticale di un punto della superficie.

2.° Essendo il punto dato p projezione verticale di un punto della superficie, il corrispondente punto in projezione orizzontale.

63. Pel punto dato p conduco la verticale ph' alla linea di terra $Y'Y$. Considero ph' come traccia di un piano perpendicolare alla linea di terra $Y'Y$; e costruisco (57) sul piano orizzontale di projezione la intersezione $\pi SLS_{,}$ $L'\pi'\pi$ di questo piano ph' colla superficie. Dal punto d'intersezione $p_{,}$ della $p'h'$ colla $Y'Y$, verso Y', taglio la $p_{,}\pi_{,}$ uguale alla pp; e per $\pi_{,}$ tiro la $\pi_{,}\pi$ parallela alla ph'. Se la $\pi_{,}\pi$ taglia la costrutta curva d'intersezione del piano ph' colla superficie, il punto p può essere projezione verticale di un punto della superficie.

Perciocchè per essere il punto p projezione verticale di un punto della superficie, la retta projettante il punto p debbe procedere da un punto della superficie; ma essa retta projettante giace sul piano ph'; dunque il punto della superficie dal quale essa procede debbe ad un tempo essere sul piano ph'; dunque debb'essere un punto della intersezione del piano ph' colla superficie: epperò se il piano ph' rota intorno la sua traccia orizzontale di projezione, trascinando seco la curva di sua intersezione colla superficie e la retta projettante il punto p, che giace sur esso; questa continuerà a procedere da essa curva per tutta la rotazione del piano ph'; e così quando sarà giunto sul piano orizzontale di projezione. Ma durante la rotazione del piano ph', il piede della retta projettante il punto p sul piano verticale di projezione, genera il quadrante $p\pi_{,}$ di centro $p_{,}$ e di raggio $p_{,}p$; onde quando il piano ph' sarà giunto sul piano orizzontale di projezione essa troverassi in $\pi_{,}\pi$. Dunque perchè il punto p sia projezione verticale di un punto

della superficie, la retta $\pi_{,}\pi$ debbe procedere da un punto della curva $\pi SLS_{,}L'\pi$; ossia prolungata debbe incontrarla.

64. Sia dunque p la projezione verticale di un punto della superficie: vogliasi il corrispondente punto in projezione orizzontale.

Pel punto p conduco la verticole ph'; e considerandola come projezione di un piano, costruisco sul piano orizzontale di projezione (57) la intersezione $\pi SLS_{,}L'\pi'$ di un tal piano colla superficie. Da $p_{,}$ verso Y' taglio la $p_{,}\pi_{,}$ uguale alla $p_{,}p$: per $\pi_{,}$ tiro la $\pi_{,}\pi$ parallela alla ph'; e pei punti π', π di suo incontro colla curva $\pi SLS_{,}L'\pi'$ conduco le πP, $\pi' P'$ parallele alla $Y'Y$. I punti d'incontro P, P' delle πP, $\pi' P'$ colla ph', sono i punti domandati: punti di projezione orizzontale di quei punti della superficie, dei quali il punto dato p è projezione verticale.

Di fatti ho dimostrato di sopra che per essere p projezione verticale di un punto della superficie, la retta $\pi_{,}\pi$ debbe procedere dalla curva $\pi SLS_{,}L'\pi'\pi$, ossia incontrarla; e che la retta $\pi_{,}\pi$ è la medesima retta projettante il punto p, quando, per la rotazione del piano ph' intorno alla sua traccia $p_{,}h'$, insieme colla curva $\pi SLS_{,}L'\pi'\pi$ saranno giunte sul piano orizzontale di projezione. Per la qual cosa essendo i punti $\pi_{,}\pi'$ quelli della curva $SLS_{,}L'S$ dai quali procede la $\pi\pi_{,}$; i punti P, P', projezioni dei punti π, π' sulla traccia $p_{,}h'$ del piano che rota, saranno le projezioni di essi medesimi punti π, π' sul piano orizzontale di projezione, quando il piano rotato ritorna nella sua primiera posizione nella quale è projettato in $p_{,}h'$. Ed è però che i punti P, P' sono le projezioni orizzontali di quelli punti della superficie dei quali il punto dato p è projezione verticale.

Digitized by Google

COROLLARIO

65. Al punto dato p possono corrispondere, per la fatta costruzione, da uno sino a quattro punti come li P, P'. Perciocchè la retta π, π può incontrare la curva d'intersezione di un piano come il ph' colla superficie una, due, tre, ed anche quattro volte; secondo che la incontri toccandola o tagliandola, e la curva corrisponda all'uno od all'altro dei quattro casi enumerati (61) nel corollario del Lemma precedente. Dunque il punto p può essere projezione o di uno, o di due, o di tre, o di quattro punti della superficie.

SCOLIO 1.

66. Per le cose fin qui dette è facile costruire la superficie, dati che ne siano i determinanti. E ciò si può od assumendone un punto in projezione orizzontale, od in projezione verticale, e costruendone il corrispondente punto in projezione verticale od orizzontale, lo che si fa per le due proposizioni precedenti; oppure costruendo le projezioni di una serie delle sue generatrici.

Volendo costruirla in quest'ultima maniera; perciocchè la superficie ha un piano diametrale, ed è quello che passa pel punto determinatore e per la retta direttrice (16, 33), per averne elegante rappresentazione, assumo per piani di projezione due piani perpendicolari tra loro ed al piano diametrale, e dei quali l'orizzontale passi pel punto determinatore.

TAV. VI. Sia D il punto determinatore, R la projezione orizzontale della retta direttrice, M ed N i parametri maggiore e minore.

Digitized by Google

Pel punto determinatore D e pel punto R projezione orizzontale della retta direttrice conduco la indefinita Dr, e pel punto ρ della Dr la $Y'Y$ ad essa perpendicolare. Sarà $Y'Y$ la linea di terra dei piani di projezione: ed il punto determinatore D sarà projettato in ρ.

67. Da R verso ρ taglio la RC uguale all'eccesso del parametro maggiore M sul minore N, e col centro R ed il raggio uguale al parametro minore N descrivo la circonferenza $AB_1B_{11}B_1A$, e col centro C ed il raggio CA uguale al parametro maggiore M descrivo la circonferenza $AF_6F_{11}F_6A$.

Dal centro R tiro una serie di raggi delle descritte circonferenze, e ciascuno lo prolungo tanto per quant'è la sua parte intercetta tra esse due circonferenze: così taglio la F_6E_6 uguale alla F_6B_6. La curva $AE_1E_6E_6E_{11}E_6A$ costituita dagli estremi del prolungamento di tutti cotesti raggi, e la circonferenza $AB_1B_6B_1A$ sono i limiti della projezione orizzontale della superficie; e lo spazio compreso tra esse curve la projezione orizzontale della superficie tutta intera: e le porzioni di tutti i detti raggi, come le B_1E_1, B_6E_6, B_6E_6, $B_{11}E_{11}$, comprese tra cosiffatti limiti, sono projezioni orizzontali delle circonferenze generatrici della superficie (10, 54). I quali raggi per eleganza del disegno gli ho condotti pel punto A ed il suo diametralmente opposto B_{11} e per li punti di divisione della circonferenza $AB_1B_6B_1A$, avendone divisa ciascuna metà da A in B_{11}, in dodici parti uguali.

Dunque la curva $AE_1E_6E_6E_{11}E_6A$, descritta unendo i punti estremi E, E_1, E_6, E_1... E_{11} di essi raggi prolungati, rappresenta il limite maggiore della projezione orizzontale della superficie: la circonferenza $AB_1B_{11}B_1A$ ne

rappresenta il minore: e le rette terminate BE, B_1E_1, B_2E_2, B_3E_3 ... B_6E_6 ... $B_{11}E_{11}$ altrettante projezioni orizzontali di una serie di generatrici della superficie.

68. Dei punti di ciascuna di queste projezioni orizzontali delle generatrici della superficie, determinando (per le cose dette (55) nella penultima proposizione) i corrispondenti punti in projezione verticale, si otterrà la corrispondente projezione verticale di quella individuata generatrice della superficie, della quale la retta su cui que' punti sono è projezione orizzontale. Ma se si consideri che le generatrici projettate nelle rette BE, B_1E_1, B_2E_2, B_3E_3 .... B_6E_6 ... $B_{11}E_{11}$ sono delle circonferenze di circolo aventi i centri projettati nella circonferenza $AF_6F_{11}F_6A$ ed i raggi rispettivamente uguali alla metà di esse rette BE, B_1E_1 ... B_6E_6 .. $B_{11}E_{11}$, è chiaro che la projezione verticale di ciascuna di esse, per esempio di quella projettata in B_6E_6 sarà una ellisse di semiasse maggiore uguale alla F_6E_6 e di semiasse minore uguale alla projezione di essa F_6E_6 sulla linea di terra, cioè uguale a $\varphi\varepsilon$, e che il centro di essa ellisse sarà sulla perpendicolare F_6f alla linea di terra eretta pel punto F_6, ed alto sulla linea stessa di terra per φf uguale ad F_6E_6 (44); sarà cioè in f: ed il suo asse maggiore sarà verticale ed il minore orizzontale. Dunque nota la posizione del centro, e gli assi di grandezza e posizione di coteste ellissi projezioni verticali delle generatrici, costruendosi coi noti metodi cosiffatte ellissi si costruiranno le projezioni verticali delle generatrici della superficie projettate orizzontalmente in BE, B_1E_1 ... B_6E_6 ... $B_{11}E_{11}$.

Ma dalle cose dette innanzi può trarsi modo di costruire ciascuna di cosiffatte ellissi per via delle cose già segnate nel disegno, ed indipendentemente dagli assi. Così

Digitized by Google

vogliasi costruire la ellisse projezione verticale di quella generatrice, la quale è projettata orizzontalmente in B_6E_6. Dal punto F_6 eretta la F_6f perpendicolare ad $Y'Y$, taglio su di essa φf uguale alla F_6B_6; col centro f e raggio $f\varphi$ descrivo la semicirconferenza $\varphi q\varphi'$, e la divido in un numero uguale di parti uguali: in quattro. Pel punto F_6 tiro la indefinita F_6Q, e dai punti di divisione φ, t, q, t', φ', della detta semicirconferenza, tiro le verticali φF_6, tT, qQ, $t'T$, $\varphi'F_6$; e sulla F_6E_6 taglio le F_6I, F_6I_1 uguali alla F_6T, ed F_6E_6, F_6B_6 uguali ad F_6Q. Dai punti di divisione φ, t, q, t', φ' della semicirconferenza tiro delle rette orizzontali, e dai punti B_6, I_1, F_6, I, E_6 delle rette verticali. I punti d'intersezione φ, φ' della verticale eretta per F_6 colle orizzontali tirate per φ, φ'; i punti d'intersezione i, i', i_1, i'_1, delle verticali erette per I, I_1 colle orizzontali condotte per t, t'; ed i punti d'intersezione e, e_1 delle verticali erette per E_6, B_6 colla orizzontale condotta per q, sono punti della ellisse projezione verticale di quella generatrice della superficie che ha la retta B_6E_6 per projezione orizzontale. E però la linea condotta per cotesti punti d'intersezione sarà la ellisse projezione verticale della generatrice della superficie, che è orizzontalmente projettata in B_6E_6.

Nella stessa maniera costrutte tutte le altre ellissi corrispondenti alle rette B_3E_3, B_6E_6... B_9E_9... $B_{12}E_{12}$ la superficie vien rappresentata come si vede nel disegno.

69. Una curva che inviluppi superiormente tutte le projezioni verticali delle diverse generatrici sarà il limite superiore della projezione della superficie; la quale dalla parte di sotto avrà per limite la parte $\varphi_1\varphi$ della linea di terra $Y'Y$ compresa tra le due rette $F_6\varphi$, $F_6\varphi_1$ ad essa perpendicolari, e

tangenti alla circonferenza $AF_sF_nF_sA$, che è projezione della linea dei centri. Il piano E_sR condotto per la retta direttrice parallelo al piano verticale di projezione stacca dalla superficie quella parte che, essendone anteriore, in projezione verticale ne nasconde la parte posteriore; onde una curva che superiormente tocca tutte le ellissi corrispondenti alle diverse rette comprese tra le B_sE_s ed il punto A limiterà superiormente la projezione della parte anteriore della superficie, che nasconde parte della posteriore. Le quali tre linee limiti ho tracciate nel disegno, e vi ho distinte le parti anteriori o visibili dalle posteriori od invisibili.

SCOLIO 2.

70. Fin ora ogni qual volta si è detto generatrice della superficie, si è tacitamente supposto parlarsi della circonferenza generatrice. Ma potendosi avere la superficie come inviluppo di una superficie rigata (40); ed aversi però come generata dalle caratteristiche dell' inviluppo, è chiaro potersi rappresentare ancora costruendo una serie di coteste novelle sue generatrici, ossia costruendo una serie di quelle caratteristiche: e ciò si può fare per via delle costruzioni medesime (68) fatte per descrivere ciascuna delle ellissi, come la $\varphi ie_1'\varphi' i_1' e_1 i_1 \varphi$ tanto solo che tutte le semicirconferenze come la $\varphi lq l'\varphi'$ si dividano in un egual numero di parti uguali, e non altrimenti. Le linee condotte per tutti cotesti punti di divisione delle diverse circonferenze, analoghi, ossia omologhi a quelli che saranno determinati procedendo come nello scolio precedente, saranno le projezioni di altrettante caratteristiche o generatrici, di questa seconda generazione della superficie. Così la linea condotta

per tutti gli omologhi al punto φ sarà una prima di queste nuove generatrici; la linea condotta per tutti i punti omologhi al punto i, sarà una seconda di cosiffatte generatrici; la linea condotta per tutti quelli analoghi al punto e ne sarà una terza; e così una quarta quella condotta per tutti i punti omologhi al punto i'; una quinta la condotta per tutti i punti omologhi al punto φ'; e così di seguito. Onde le costruzioni saranno le medesime che per lo scolio precedente; e la differenza sarà solo nel condurre le curve per tutti i detti punti omologhi che apparterrebbero alle diverse ellissi; in vece che per tutti quelli appartenenti ad una medesima ellisse.

Similmente si avranno le projezioni orizzontali di queste seconde generatrici facendo passare delle curve pei punti delle rette BE, B_1E_1, B_2E_2 ... B_3E_3 ... $B_{11}E_{11}$ corrispondenti ai punti in projezione verticale omologhi al punto φ, omologhi al punto i, omologhi al punto e, omologhi al punto i', omologhi al punto φ', e così via discorrendo.

71. La superficie così costrutta, cioè costruendo le sue generatrici, che sono sue caratteristiche, quando si consideri inviluppo di una superficie rigata, è rappresentata nella Tavola settima. Dai punti L, L' conducendo perpendicolari ad $Y'Y$ le tangenti alla circonferenza $ALFF'L'A$ descritta col centro C e col parametro maggiore M come raggio, si ha nella parte ll della linea di terra, che è intercetta da esse tangenti, un limite della projezione verticale della superficie: ed una curva $ltrt'l'$ che circonda tutte le generatrici dal punto l al punto l', è il limite superiore e laterale della projezione verticale della superficie. La curva $ATEE'T'A$, e la circonferenza $ABB'A$ di centro R e di TAV. VII.

Digitized by Google

raggio il parametro minore N sono i limiti, come nello scolio precedente (67), della projezione orizzontale della superficie.

72. Che se data la projezione orizzontale di un punto della superficie si voglia costruire la caratteristica che passa per quel punto, ecco come procedo.

Siano i piani di projezione come di sopra (66), siano dati i determinanti della superficie, e sia P il punto dato. Descrivo in primo le due circonferenze $ABB'A$, $ALFL'A$ col centro R ed il raggio uguale N la prima, col centro C ed il raggio uguale M la seconda. Pel punto dato P e pel punto R projezione della direttrice, conduco la retta PR; e per le cose dette nella penultima proposizione (55) trovo il punto p in projezione verticale corrispondente al dato punto P. Debbo ora determinare un altro punto della caratteristica che passa pel punto (P,p). Perciò pel centro f e pel punto π della semicirconferenza $\varphi t \pi$ semigeneratrice corrispondente al punto (P,p), tiro il raggio indefinito $f\pi$, per la projezione R della direttrice tiro un raggio indefinito RE, pel suo punto d'incontro F colla circonferenza $ALFL'A$ elevo la Ff perpendicolare ad $Y'Y$, ed a partire da questa sulla Ff taglio $\varphi' f$ uguale alla distanza FB' del punto d'incontro F' della RE colla circonferenza $ALFL'A$, dall'altro punto d'incontro della medesima RE coll'altra circonferenza $ABB'A$: in oltre a partire da f sul raggio indefinito πf taglio la parte $f\pi'$ uguale alla stessa distanza FB', ossia uguale a $\varphi' f$, dal punto π' del taglio tiro la orizzontale $\pi' o$ e dal punto o, ove la $\pi' o$ incontra la Ff, tiro la oo' parallela ad ff': per ultimo dal punto o', ove la oo' incontra la Ff' tiro la orizzontale $o'\varpi$. Saranno le rette RE, $o'\varpi$ i luoghi della projezione orizzontale e della

Digitized by Google

projezione verticale del punto richiesto: la qual cosa dopo il fin qui detto stimo superfluo il dimostrare. Per determinare la posizione delle projezioni del punto su cotesti suoi luoghi, sulla RE' a partire da F' prendo la parte $F'P'$ uguale ad $o\pi'$, e per P' innalzo la $P'p'$ perpendicolare ad $Y'Y$. P' è la projezione orizzontale del punto cercato, e p', intersezione della retta $P'p'$ colla $o'\omega$, è la projezione verticale del punto stesso. Onde (P',p') è un' altro punto della caratteristica che passa pel dato punto (P,p) (*).

(*) Circa due anni dopo che ebbi letta questa Memoria, presentai all' Accademia medesima, come applicazione delle generalità da me precedentemente pubblicate, una Memoria analitica *su alcune superficie anulari particolari di seconda classe*: e così presi a trattare di nuovo, ma coll' analisi, della superficie che ora qui ho costrutta.

La equazione in quella memoria trovatane è

$$z^2-2z\frac{(R-r)x+\sqrt{R^2x^2+(2R-r)ry^2}-r\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}+$$
$$+\left(\frac{(R-r)x+\sqrt{R^2x^2+(2R-r)ry^2}-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2=0.$$

E quelle della sua caratteristica, anche qui sopra costrutta, le due

$$x^2-2(R-r)x+y^2=r(2R-r)$$

$$(R-r)x+\sqrt{R^2x^2+(2R-r)ry^2}-r\sqrt{x^2+y^2}=z\sqrt{x^2+y^2}.$$

Le quali equazioni sono riferite a tre assi ortogonali, dei quali l' asse delle z è la retta direttrice della superficie, l'asse delle x una retta ad essa normale condotta pel punto determinatore, l'asse delle y una perpendicolare alle due precedenti che passa per la loro intersezione: e nelle quali R è il parametro maggiore, r il minore.

La equazione generale della famiglia di anulari, della quale quella qui costrutta può dirsi una sotto varietà, come si è considerato allo scolio 3.° della proposizione terza, è la

$$z^2-2z\frac{ax+\sqrt{R^2x^2+(R^2-a^2)y^2}-r\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}+$$
$$+\left(\frac{ax+\sqrt{R^2x^2+(R^2-a^2)y^2}-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2=0.$$

Digitized by Google

COROLLARIO

73. Dalla costruzione fatta per determinare un secondo punto (P',p') della caratteristica che passa pel dato (P,p), si rileva che tutti i punti di una medesima caratteristica sono determinati, in projezione orizzontale per via di ascisse che passano pel polo R, computate dalla circonferenza $ALFF'L'A$; ed in projezione verticale per ordinate normali alla linea di terra, erette per gli corrispondenti punti della projezione orizzontale, computate dalla linea dei centri, e date in grandezza da una serie di triangoli rettangoli simili al triangolo $fi\pi$ dipendente dal punto dato (P,p) e perciò dato; dei quali triangoli il cateto orizzontale è uguale all' ascissa, e l'altro cateto è uguale all' ordinata. Così pel punto (P',p') della caratteristica che passa pel dato punto (P,p), l'ascissa $F'P'$ riferita al polo R e computata dalla circonferenza $ALFF'L'A$ è uguale al cateto orizzontale $o\pi'$, e l'ordinata computata dalla linea dei centri è uguale all'altro cateto fo: onde poi è sp' uguale ad fo più $f\pi'$, essendo $f\pi'$ uguale $\varphi'f'$; ossia computando l'ordinata dalla linea di terra $Y'Y$, è uguale all'altro cateto fo più l'ipotenusa $f\pi'$ del medesimo triangolo $fo\pi'$, del quale il cateto $o\pi'$ è uguale all'ascissa $F'P'$. Può dunque sempre costruirsi in un modo assai spedito la caratteristica che passa per un dato punto della superficie, costruendo a parte il triangolo, $fi\pi$ dipendente dal punto dato, e tutti i suoi simili.

nella quale in vece del parametro minore r v'è il raggio $R=M$ del cilindro maggiore, e la distanza $a=RC$ dei centri delle basi dei due cilindri.

Le sei sotto varietà espresse al numero 39, corrispondono ai casi di

$a=0$
$a<R-r$
$a=R-r$
$a>R-r$
$a=R+r$
$a>R+r$

Digitized by Google

Per darne un esempio, assumo per piano orizzontale di projezione un piano normale alla retta direttrice e che passa pel punto determinatore; assumo che sia D il punto determinatore, $(R, \rho r)$ la retta direttrice, M, N i parametri maggiore e minore della superficie; e che vogliasi costruire la caratteristica che passa pel punto (P, p). Ecco come procedo. TAV. VIII.

74. Pei punti P ed R tiro la indefinita RP, coi centri R e C, e coi raggi N ed M descrivo due circonferenze, e determino il punto (F, f) della linea dei centri (43,44), corrispondente al punto (P, p). Pel punto f tiro la orizzontale $ff_{,}$ sino ad incontrare una verticale arbitraria αi. Col centro $f_{,}$ descrivo una semicirconferenza che tocca la linea di terra, e pel punto p conduco la orizzontale $p\pi$: pel punto π di suo incontro colla descritta semicirconferenza e pel centro $f_{,}$ di questa, tiro la $\pi f_{,}$; è $f'i\pi$ il triangolo rettangolo corrispondente al punto dato (P, p), pel quale si determinano le dette ascisse ed ordinate delle projezioni della caratteristica che passa per esso punto (P, p). Per costruire tutti gli altri triangoli simili al precedente, pel punto R conduco una serie di raggi che potrebbero tagliare parti uguali sulla circonferenza di raggio uguale N; e col centro f descrivo una serie di semicirconferenze la prima di raggio uguale alla parte del primo raggio $RF_{,}$, alla sinistra di RP, intercetta tra le due circonferenze, l' una di raggio M, e l' altra di raggio N; la seconda di raggio uguale alla parte del secondo raggio per R intercetta tra le stesse circonferenze; la terza di raggio uguale alla porzione del terzo raggio intercetta tra le stesse circonferenze; e così di seguito: e fo lo stesso per gli raggi a destra di RP. Dai punti $\pi_{,}$, π', $\pi_{,}$, π^{4}, π_{5} π', di loro intersezione colla $f_{,}\pi$ tiro le

orizzontali $\pi_1 1$, $\pi_2 2$, $\pi_3 3$, $\pi_4 4$, $\pi_5 5$, $\pi' 1'$. I triangoli rettangoli, simili al triangolo $f_1 \pi$, che vengono a costituirsi, sono i triangoli che danno le ascisse e le ordinate delle projezioni orizzontale e verticale della caratteristica che passa pel punto dato $(P_1 p)$.

Per segnare i diversi punti di cotesta caratteristica, sulla RF_1, a partire dal punto F_1 taglio la $F_1 P_1$ uguale al cateto $\pi_1 1$: è P_1 la projezione orizzontale di un secondo punto della caratteristica. Pel punto P_1 elevo la $P_1 p_1$ perpendicolare alla linea di terra $Y'Y$, e sulla $P_1 p_1$ segno il punto p_1 alto sulla $Y'Y$ per quanto è il cateto $f_1 1$ più la ipotenusa $f_1 \pi_1$, ossia segno il punto p_1 alto sulla linea di terra per $\alpha_1 1$: è p_1 la projezione verticale del detto secondo punto della caratteristica, che corrisponde al punto P_1 in projezione orizzontale. Similmente sugli altri raggi come li RF, RF_1, condotti per R, a partire dai loro punti sulla circonferenza di centro R e raggio M, verso R tagliando parti successivamente uguali ai cateti $\pi_2 2$, $\pi_3 3$, $\pi_4 4$, $\pi_5 5$, $\pi' 1'$, ottengo tutti gli altri punti della projezione orizzontale della caratteristica; e per essi punti elevando le perpendicolari alla linea di terra $Y'Y$, ed a partire da questa tagliando sur esse perpendicolari, delle rette rispettivamente uguali alle $\alpha_2 2$, $\alpha_3 3$, $\alpha_4 4$, $\alpha_5 5$, $\alpha' 1'$, ottengo gli altri punti della projezione verticale della caratteristica. E così dati i determinanti della superficie ed il suo punto (P, p), ottengo la caratteristica della superficie che passa per esso punto.

SCOLIO 3.

75. Si consideri un' individuato punto della circonferenza generatrice della superficie; e per un tal punto passi il

Digitized by Google

raggio di essa circonferenza. Si muova la circonferenza per modo da generare la superficie: l'individuato punto genererà la sua caratteristica, quando la superficie sia inviluppo di una superficie rigata (40), ed il detto raggio prolungato genererà un'altra superficie rigata, la quale è facile costruirsi data che sia la curva dei centri, la caratteristica, e la retta direttrice. Perciocchè il piano della circonferenza generatrice passando sempre per la retta direttrice, il raggio prolungato, che genera questa nuova superficie rigata, passerà ad un tempo per la caratteristica, per la curva dei centri, e per la retta direttrice. Onde potrà costruirsi determinando una serie di rette che si appoggino ad un tempo a queste tre linee. La qual cosa è assai facile.

Di fatto se per un'individuato punto della caratteristica e per la retta direttrice si conduca un piano, esso incontrerà la curva dei centri; e la retta condotta per questo punto d'incontro e per l'individuato punto della caratteristica sarà una retta di questa nuova superficie rigata. Così ripigliando il disegno dello scolio precedente, volendo costruire, di questa superficie rigata, la retta che passa pel punto (P,p) di una data caratteristica, conduco per P la retta PR, pel suo punto d'incontro F colla circonferenza $ALFF'L'A$ conduco la Ff perpendicolare alla $Y'Y$, taglio su di essa a partire dalla $Y'Y$ la φf uguale ad FB, e pel punto f e pel punto dato p conduco la fp. È (PR, pf) la retta di questa nuova superficie rigata, che passa per l'individuato punto (P,p). Di fatto è PR il piano condotto per l'individuato punto (P,p) e per la retta direttrice $(R, \rho r)$, ed il punto F è la projezione orizzontale del suo incontro colla linea dei centri, che è projettata orizzontalmente nella circonferenza $ALFF'L'A$ di centro C e di TAV. VII.

Digitized by Google

raggio il parametro maggiore M (43); onde poi (F,f) esso punto d'incontro (44): e la retta (PR, pf) stando sul piano PR e passando pei punti (P,p) ed (F,f), della caratteristica il primo e della curva dei centri il secondo, si appoggerà ad un tempo ad esse curve ed alla retta direttrice.

Ora questa nuova superficie così generata è una superficie rigata non sviluppabile; ed è normale alla superficie di che si tratta. È non sviluppabile, perciocchè se fosse invece sviluppabile due sue rette consecutive dovrebbero stare in un piano; e però dovrebbero entrambe incontrare la retta direttrice della superficie in un medesimo punto, lo che non può essere; facendo esse angolo uguale colla verticale, e stando in equidifferenza le projezioni orizzontali delle loro parti intercette tra la direttrice e la curva dei centri, alle rispettive parti intercette tra la curva dei centri e la caratteristica, mentre che per incontrare la direttrice in un medesimo punto, dovrebbero stare in equiquoziente. Ed è normale alla superficie; perciocchè generata da retta sempre normale alla generatrice della superficie.

76. Tra tutte le infinite superficie rigate normali alla superficie, ve ne sono due singolari; l'una a piano direttore, l'altra sviluppabile: tutte le altre potrebbonsi dire a cono direttore. Si consideri una retta qualunque di coteste superficie rigate normali; e s'immagini che generi un cono retto avente la direttrice per asse ed il suo punto d'incontro con essa retta per vertice. Ogni lato di questo cono avrà una retta della superficie rigata normale cui quella retta appartiene, che gli sarà parallela. Ma un tal cono direttore per ciascuna delle infinite superficie rigate normali, avendo diversa ampiezza, cioè diverso angolo al vertice; potranno

darsi due casi singolari: quando l'angolo al vertice sarà uguale ad un quadrante, e quando sarà uguale a zero. Nel primo caso il cono si trasformerà in un piano; ed allora la superficie rigata normale sarà a piano direttore, ed orizzontale se la direttrice è verticale. Nel secondo caso il cono si ridurrà al suo solo asse, ch'è la direttrice della superficie; ed allora la superficie rigata normale sarà sviluppabile: sarà un cilindro a lati verticali se la direttrice è parimenti verticale.

LEMMA.

Dati i determinanti della superficie ed un suo punto: costruire l'inviluppata rigata non sviluppabile della superficie, che passa pel punto dato.

77. Assumo per piano orizzontale di projezione un piano condotto pel punto determinatore normale alla retta direttrice. TAV. VIII.

Sia D il punto determinatore, $(R, \rho r)$ la retta direttrice, M ed N i parametri della superficie in grandezza, (P,p) il punto dato. Vogliasi costruire l'inviluppata rigata non sviluppabile che passa pel punto (P,p).

78. Pel punto determinatore D e per la projezione R della direttrice, tiro la indefinita DR; e da R verso Y taglio RC uguale all'eccesso del parametro maggiore M sul minore N. Coi centri R e C, ed i raggi rispettivamente uguali al parametro minore N, ed al maggiore M descrivo le due circonferenze $ABB_{,}A$, $AFF_{,}A$.

Per la projezione orizzontale P del punto dato, e pel punto R tiro la PR; ed a partire dal punto B di sua

intersezione colla circonferenza ABB_5A taglio una serie di archi uguali di essa circonferenza, BB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., così dall' una che dall' altra parte della RP; e per li punti di divisione B_1B_2, B_2, B_3, ... di essa circonferenza tiro i raggi RB_1, RB_2, RB_3, ...

Sono cotesti raggi RB, RB_1, RB_2, RB_3 ... prolungati le projezioni orizzontali delle rette della inviluppata rigata, la quale passa pel punto dato (P,p). Di fatto tutte coteste rette dovendo toccare le circonferenze generatrici della superficie debbono essere nei piani di queste; e le rette RB, RB_1, RB_2, RB_3, ... sono le projezioni di cosiffatti piani (10), e però delle rette della inviluppata, le quali in essi piani sono.

Debbo ora costruire le projezioni verticali delle rette istesse.

79. Il punto d' incontro F della RB condotta pel punto dato P, colla circonferenza AFF_5A di centro C e raggio il parametro maggiore M, è projezione orizzontale di un punto della curva dei centri (43). Ne determino il corrispondente f in projezione verticale (44). Per f tiro la orizzontale ff_1, sino ad incontrare una verticale arbitraria $\alpha\alpha$. Col punto d' incontro f_1 di questa verticale, colla detta orizzontale f_1f, come centro, descrivo la circonferenza $\alpha\alpha\pi$ tangente alla linea di terra $Y'Y$, e col medesimo centro f_1 e con dei raggi uguali alle parti F_1B_1, F_2B_2, F_3B_3, ... delle RB, RB_1, RB_2 ... intercette tra le due circonferenze ABB_5A, AFF_5A descrivo altrettante semicirconferenze. Per la projezione verticale p del punto dato tiro la orizzontale pi, pel punto di suo incontro π colla semicirconferenza $\alpha\alpha\pi$ tiro il raggio πf_1. Per tutti i punti π_1, π_2, π_3, π_4, π_5 ... d' intersezione, di questo raggio πf_1, colle descritte semicir-

Digitized by Google

conferenze, tiro le tangenti πt, $\pi_1 t_1$, $\pi_2 t_2$, ... alle rispettive circonferenze; e le ordinate ortogonali $\pi_1 1$, $\pi_2 2$, $\pi 3$, $\pi 4$... alla verticale αt.

Con questi elementi costruisco le projezioni verticali delle rette della inviluppata rigata, corrispondenti a quelle sue che hanno per projezioni orizzontali le rette RF, RF_1, RF_2, RF_3... : ed ecco in qual modo. Rispetto alla projezione verticale della retta corrispondente alla FR, pei punti P ed F elevo le perpendicolari indefinite Pp, Ff alla linea di terra: sopra Ff, a partire da φ, taglio la φe uguale alla distanza αt dell' incontro t della tangente nel punto π colla verticale αt, dall' estremo inferiore α del diametro della semicirconferenza cui appartiene il punto π: pei punti p ed e tiro la pe; è pe la projezione verticale della retta della inviluppata rigata che ha la FR per projezione orizzontale. Similmente per costruire la projezione verticale corrispondente a quella retta dell' inviluppata rigata, della quale la retta RF_1, è projezione orizzontale, pei punti P_1, F_1 elevo le perpendicolari indefinite P_1p_1, F_1e_1 alla linea di terra; e della P_1p_1, a partire da $Y'Y$ taglio una parte uguale alla distanza $1\alpha_1$ del piede 1 della ordinata $\pi_1 1$ alla αt condotta per π_1, dall' estremo inferiore α_1 del diametro della semicirconferenza cui appartiene π_1; e della F_1e_1 a partire da $Y'Y$ taglio una parte uguale alla distanza $\alpha_1 t_1$ dell' incontro della tangente nel punto π_1 colla verticale αt, dall' estremo inferiore istesso α_1 del diametro medesimo: pe punti p_1, e_1 tiro la retta p_1e_1; è p_1e_1 la projezione verticale di una seconda retta della inviluppata rigata che passa pel punto dato (P,p): ed è quella di cui la RF_1 è projezione orizzontale. In simile maniera, elevando delle perpendicolari alla linea di terra, pei punti di tutte le altre

Digitized by Google

rette RB_2, RB_3, RB_4.... determinati come i punti P, P_1, ed F, F_1 e tagliando sulle prime, a partire dalla linea di terra rispettivamente parti uguali alle distanze, come le $i\alpha$, $1\alpha_1$, $2\alpha_2$, $3\alpha_3$, $4\alpha_4$.... dei piedi dell'ordinate per gli punti come π, π_1, π_2, π_3, π_4,... dalle estremità inferiori come α, α_1, α_2, α_3, α_4... dei rispettivi diametri; e sulle seconde, parti uguali alle distanze, come le αt, $\alpha_1 t_1$, $\alpha_2 t_2$... dell'incontro delle tangenti nei punti come π, π_1, π_2, π_3, π_4, ... colla verticale αt dallo estremo inferiore istesso dei medesimi diametri delle semicirconferenze cui rispettivamente appartengono essi punti π, π_1, π_2, π_3, π_4 ... si avranno altrettanti punti come i p, p_1, e, e_1: e tirando per ciascuna coppia di cotesti nuovi punti delle rette, come vedonsi nel disegno, si ottengono le projezioni verticali delle altre rette della inviluppata rigata che passa pel dato punto (P,p), e le quali hanno per projezioni orizzontali le rette RF_2, RF_3, RF_4 ....

Di fatto tutte le rette di una stessa inviluppata rigata passano per una medesima caratteristica, ed incontrano le rette del cilindro projettante la curva dei centri, in punti determinati dall'incontro delle tangenti alle circonferenze generatrici, in quei loro punti appartenenti a quella individuata caratteristica per cui esse passano, col diametro prolungato di ciascuna di esse circonferenze, il quale è sul cilindro projettante suddetto (40); ed i quali punti sono però alti sul piano della circonferenza luogo degli estremi di essi diametri, per quanto è la distanza di ciascuno dai corrispondenti di questi. E per le cose dette (74) i punti come i p, p_1, p_2 ... sono projezioni verticali della caratteristica che passa pei punti (P,p); ed i punti come e, e_1, e_2 ..., sono le projezioni verticali dei punti del cilindro projet-

Digitized by Google

tante la curva dei centri, determinati come è detto di sopra; perciocchè le circonferenze descritte col centro f, sono appunto in grandezza le circonferenze generatrici corrispondenti alle posizioni RB, RB_1, RB_2, RB_3... del loro piano che rota (10), i punti π_1, π_2, π_3... sono i punti di esse circonferenze che appartengono ad una medesima caratteristica, cioè a quella che passa pel punto (P,p), e le tangenti ad esse circonferenze per essi punti π, π_1, π_2, π_3... sono appunto quelle che determinano la distanza del loro incontro coi diametri delle circonferenze cui appartengono i punti π, π_1, π_2, π_3... dagli estremi inferiori α, α_1, α_2, α_3... di essi medesimi diametri; ed alle quali distanze si sono fatte appunto uguali le parti φe, $\varphi_1 e_1$, $\varphi_2 e_2$, ... delle rette projettanti i punti della curva dei centri.

PROPOSIZIONE OTTAVA

Dati i determinanti della superficie ed un suo punto; menare il piano tangente alla superficie pel punto dato.

80. Costruisco la inviluppata rigata della superficie che passa pel punto dato; e per un tal punto meno il piano tangente alla costrutta inviluppata. Un tal piano toccherà anche la superficie. Perciocchè la inviluppata la tocca secondo la caratteristica, ed il punto di contatto è un punto di questa.

Per menare il piano tangente alla inviluppata per un suo punto, costruisco una paraboloide iperbolica tangente alla inviluppata in quel punto; e per esso conduco il piano tangente alla paraboloide. Questo piano essendo tangente

Digitized by Google

alla paraboloide nel punto dato, e la paraboloide toccando la inviluppata per quel punto, esso piano è anche tangente alla inviluppata; e quindi alla superficie.

81. Dati dunque i determinanti della superficie assumo per piano orizzontale di projezione un piano condotto pel punto determinatore perpendicolare alla retta direttrice. E sia D il punto determinatore, $(R, \rho r)$ la retta direttrice, M ed N i parametri in grandezza, e (P,p) il punto dato. Pel punto dato (P,p) debbo menare il piano tangente alla superficie.

82. Per la projezione orizzontale P del punto dato, e per la projezione R della direttrice, conduco la retta RF; e per le cose dette nel Lemma precedente costruisco, corrispondentemente alla retta RF, la projezione verticale pe della retta della inviluppata che passa pel punto P: e sì dall' una che dall' altra parte di essa un certo numero di rette della stessa inviluppata che passa pel dato punto (P,p): — cinque da una parte, e cinque dall' altra (79), come vedesi nel disegno.

Per determinare una paraboloide iperbolica che tocca la inviluppata nel punto dato (P,p), per la retta (RF,pe) della inviluppata che passa pel punto dato P conduco un piano $(GH, H'K)$. Questo piano toccherà la inviluppata in un qualche punto della (RF, pe). E per determinare questo punto di contatto costruisco la intersezione del piano $(GH, H'K)$ colle dieci costrutte rette della inviluppata. Così per la retta $(RF_5, m\varphi_2)$ della inviluppata conduco un piano arbitrario hom, il quale piano taglia l' altro $(GH, H'K)$ secondo la retta $(h\varphi_1, nl)$, la quale nella sua intersezione (L, l) colla retta $(RF_5, m\varphi_2)$ dà il punto (L, l) della intersezione del piano $(GH, H'K)$ colla $(RF_5, m\varphi_2)$. Simil-

Digitized by Google

mente costruisco l'incontro del medesimo piano (HG, $H'K$), colle altre rette della inviluppata. E conducendo per tutti cotesti punti la curva continua segnata nel disegno con un tratto ed un punto, ottengo la intersezione del piano (GH, $H'K$) colla inviluppata. Ed il punto (X,x) ove una tal curva d'intersezione taglia la (RF, pe) è il punto di contatto del piano (GH, $H'K$) colla inviluppata. Il piano (GH, $H'K$) toccando la inviluppata nel punto (X, x) della retta (RPF, pe), ogni retta condotta sul piano (GH, $H'K$) pel punto (X, x) potrà essere eletta a retta direttrice di una paraboloide iperbolica che abbia comune colla inviluppata la retta (RF, pe) e che la tocchi nel punto (X,x) di questa.

Per la stessa retta (RF, pe) conduco un altro piano $G\varphi_2K$; e determino il punto della retta (RF, pe) ove un tal piano tocca la inviluppata. Per fare la qual cosa costruisco i punti d'incontro del piano $G\varphi_2K$; colle dieci rette RB_1, RB_2, RB_3, RB_4 ... della inviluppata, e conduco per essi punti la linea continua espressa nel disegno con un tratto e due punti. Il punto (Z,z), ove questa curva incontra la retta (RF, pe) è il punto di contatto del piano $G\varphi_2K$ colla inviluppata. Ed ogni retta condotta sul piano $G\varphi_2K$ pel punto (Z,z) è tangente alla inviluppata nel punto (Z,z); e potrà essere eletta a direttrice di una paraboloide iperbolica che abbia comune colla inviluppata la retta (RF, pe) e che la tocca nel punto (Z, z) di questa.

Tutte le rette della inviluppata rigata essendo sui piani delle circonferenze direttrici della superficie, ne incontrano la retta direttrice; e però questa, cioè la retta (R, pr) starà tutta intera sulla inviluppata.

Dunque sul piano (GH, $H'K$) e pel suo punto di

Digitized by Google

contatto (X,x) conduco la retta (XX', xx') parallela al piano verticale di projezione; e sul piano $G\varphi_2K$ e pel punto di contatto (Z, z) conduco la retta (ZZ', zz') parallela al piane verticale di projezione; e queste due rette (XX', xx'), (ZZ', zz') e l'altra $(R,\rho r)$ sono tutte tre tangenti alla inviluppata in tre punti della stessa sua retta (RF, pe) che passa pel punto dato (P,p); e ad un tempo parallele al piano verticale di projezione.

Assumo dunque queste tre rette per direttrici di una superficie rigata. Questa superficie è palesemente una paraboloide iperbolica tangente alla inviluppata rigata della superficie lungo la retta (RF, pe) sulla quale è il punto dato (P,p). Onde poi il piano tangente a cotesta paraboloide nel suo punto (P,p) è piano tangente alla inviluppata nello stesso punto, e quindi alla superficie che è inviluppo di questa e delle altre analoghe.

Per menare pel punto (P,p) il piano tangente alla paraboloide delle tre direttrici (XX', xx'), (ZZ', zz'), $(R,\rho r)$, determino una sua retta generatrice, che si appoggia a coteste tre direttrici. Perciò per un punto della (ZZ', zz'), e che io scelgo quello (Z', z') ove incontra il piano orizzontale di projezione, e per la retta $(R,\rho r)$ fo passare un piano, che è $RZ'Q$; e determino il suo incontro (S,s) colla prima retta, direttrice della paraboloide, (XX', xx'). La retta $(SRQ, qz's)$ è la retta generatrice della paraboloide; perciocchè si appoggia ad un tempo alle tre sue direttrici (ZZ', zz'), (XX', xx'), $(R,\rho r)$.

Ho dunque due rette che si appoggiano alle dette tre direttrici (ZZ', zz'), (XX', xx'), $(R,\rho r)$ della paraboloide: e sono la retta (RF, pe) comune alla inviluppata ed alla paraboloide, e la retta $(SRQ, qz's)$. Le quali due rette,

Digitized by Google

per la doppia generazione della paraboloide, posso assumere viceversa per direttrici della paraboloide iperbolica tangente alla inviluppata nella retta (RF, pe), essendone piano direttore il piano verticale di projezione.

Se dunque pel dato punto (P,p) conduco una generatrice di questa seconda generazione della paraboloide; il piano menato per questa nuova generatrice condotta per (P,p) e per la retta (RF, pe) sarà il piano tangente alla paraboloide nel punto (P,p); perciocchè è quello di due sue rette che passano pel punto dato (P,p): e quindi sarà il piano tangente cercato.

Per determinare la generatrice della seconda generazione della paraboloide, la quale passa pel punto (P,p), pel punto P conduco il piano PQ parallelo al piano direttore, ossia conduco la PQ parallela ad $Y'Y$, essendo piano direttore lo stesso piano verticale di projezione. Il piano PQ incontra la direttrice $(RZ'Q, qz's)$ della seconda generazione nel punto (Q,q). Dunque pe' punti q, e p conduco la retta qp, ed è (PQ, pq) la generatrice richiesta della paraboloide. E però il piano menato per le rette (PQ, qp), (RF, pe) è il piano tangente dimandato. Del quale ho la traccia orizzontale menando la retta GY' pel punto G ove la (RF, pe) incontra il piano orizzontale, e pel punto T' ove l'incontra la retta (PQ, qp); e ne ho la traccia verticale menando la retta $Y'K$ pel punto d'incontro Y' della GY' colla $Y'Y$, e pel punto K ove la (RF, pe) incontra il piano verticale.

Dunque $GY'K$ è il dimandato piano tangente alla data superficie, nel suo dato punto (P,p).

Digitized by Google

LEMMA

Dati i determinanti della superficie, ed una retta: costruire una superficie rigata le di cui rette tocchino la superficie data, e si appoggino alla retta direttrice di questa ed alla retta data: e costruire la curva di contatto di esse due superficie.

TAV. IX. 83. Assumo per piano orizzontale di projezione un piano condotto pel punto determinatore normale alla retta direttrice.

E sia D il punto determinatore, (R, pr) la retta direttrice, M il parametro maggiore ed N il minore della superficie; ed (IH, hi) la retta data.

Debbo costruire una rigata che tocchi l'anulare dei dati determinanti; e le di cui rette generatrici si appoggino alla retta data (IH, hi), ed alla retta direttrice (R, pr) dell'anulare.

84. Pei punti D e R tiro la indefinita DR, e da R verso E taglio la RC uguale alla differenza del parametro maggiore M, sul minore N; e coi centri R e C, e coi raggi uguali al parametro minore N ed al maggiore M descrivo le circonferenze ABB_4A, AFF_5A. Divido la semicirconferenza BB_4A in un certo numero di parti uguali: in dodici. E per essi punti d'intersezione tiro i raggi RB, RB_1, RB_2, RB_3 ... Sono queste rette le projezioni orizzontali delle generatrici della superficie da costruirsi.

Di fatto dovendo esse appoggiarsi alla retta direttrice dell'anulare, e questa retta essendo tutta projettata in R, dovrà R essere un punto di loro projezioni: e tutte esse,

Digitized by Google

meno una, incontrano la projezione IHE della retta data (IH, hi), alla quale esse generatrici della rigata pur debbono appoggiarsi. Il solo raggio $R\beta$ parallelo alla IHE non la incontra.

85. Per determinare le projezioni verticali delle generatrici della rigata, corrispondenti alle RB, RB_1, RB_2... in projezione orizzontale, comincio dal menare pel punto R la $R\varepsilon$ parallela alla linea di terra $Y'Y$: ed a destra di R taglio le parti $R\varphi$, $R\varphi_1$, $R\varphi_2$. . . . $R\varphi_5$, $R\varphi_6$, $R\varphi_7$, $R\varphi_8$. . . uguali rispettivamente alle RF, RF_1, RF_2. . . RF_6, RF_7, RF_8, . . . ; e le parti $R\varepsilon$, $R\varepsilon_1$, $R\varepsilon_2$, $R\varepsilon_3$, . . . uguali rispettivamente alle RE, RE_1, RE_2, RE_3 . . . che sono le distanze del punto R dai punti E, E_1, E_2, E_3, . . . , ove i raggi RB, RB_1, RB_2, RB_3, . . . incontrano la projezione IH della retta data (IH, hi) : ed a sinistra le $R\varphi'_1$, $R\varphi'_2$, $R\varphi'_3$, ... uguali rispettivamente alle RF'_1, RF'_2, RF'_3, ...

Dai punti φ, φ_1, . . . φ'_1, φ'_2, φ'_3, . . . inalzo le perpendicolari φf, $\varphi_1 f_1$, . . . $\varphi'_1 f'_1$, $\varphi'_2 f'_2$, $\varphi'_3 f'_3$, . . . alla linea di terra $Y'Y$; taglio su di esse a partire da essa linea di terra delle parti uguali rispettivamente alle FB, F_1B_1, F_2B_2, . . . $F'_1B'_1$, $F'_2B'_2$, $F'_3B'_3$,... ; e coi punti f, f_1, f_2, f_3. . . . f'_1, f'_2, f'_3, . . ., che così ottengo, come centri, e coi raggi uguali alle elevazioni di ciascuno di essi da su la linea di terra descrivo delle circonferenze di circolo.

È chiaro essere queste le circonferenze generatrici dell'anulare che sono sui piani RB, RB_1, RB_2, RB_3, . . ., abbattuti tutti sul piano $R\varepsilon$, per una rotazione dei piani di esse circonferenze intorno alla direttrice (R, ρr) dell'anulare.

Pei punti E, E_1, E_2, E_3 . . . , ove i raggi RB, RB_1,

RB_0, RB_1, . . . incontrano la projezione orizzontale IHE della retta data (IH, hi) innalzo le perpendicolari Ee, E_1e_1, E_2e_2, E_3e_3, . . . alla linea di terra. Pei punti e, e_1, e_2, e_3, . . . ove queste incontrano la projezione verticale ih di essa medesima retta (IH, hi) meno le orizzontali ee', $e_1e'_1$, $e_2e'_2$, $e_3e'_3$, . . . $e_9e'_9$; e per gli già ottenuti punti ε, ε_1, ε_2, ε_3, . . . inalzo le perpendicolari $\varepsilon e'$, $\varepsilon_1e'_1$, $\varepsilon_2e'_2$, $\varepsilon_3e'_3$, . . . $\varepsilon_9e'_9$ alla linea di terra $Y'Y$. E pei punti e', e'_1, e'_2, e'_3, . . . e'_9 della intersezione di ciascuna di queste perpendicolari colle corrispondenti orizzontali menate, tiro le rette tangenti alle descritte circonferenze: cioè pel punto e' alla circonferenza di centro f, pel punto e'_1 a quella di centro f_1, pel punto e'_2 a quella di centro f_2 ed all'altra di centro f'_2, pel punto e'_3 a quella di centro f_3 ed all'altra di centro f'_3, e così di seguito, sino a menare pel punto e'_8 la tangente alla circonferenza di centro f_8 ed all'altra di centro f'_8, e per ultimo pel punto e'_9 alle circonferenze di centro f_9 ed f'_9.

Tutte queste tangenti sono le rette generatrici medesime della superficie rigata da costruirsi, quando coi piani RB, RB_1, RB_2, RB_3, . . . su cui esse sono, pel rivolgersi di questi intorno alla retta (R, ρr), si riducono sul medesimo piano $R\varepsilon$. Di fatto uno qualunqne di essi piani individuato, per esempio il piano RB_8 incontra la retta data (IH, hi) nel punto (E_8, e_8); pel quale punto, se s'intenda menata una retta tangente a ciascuna delle due circonferenze dell'anulare che giacciono sul piano medesimo RB_8, anderà essa a passare per la retta (R, ρr), onde sarà una retta generatrice della rigata da costruirsi; perciocchè tocca una circonferenza dell'anulare, e perciò l'anulare medesima, e passa per la direttrice dell'anula-

Digitized by Google

re, e per la retta data: e ciascuna delle rette menate pel punto e'_8 tangenti alle due circonferenze di raggio f_8 l'una, e di raggio f'_8 l'altra, è per lo appunto ciascuna delle dette rette tangenti alle circonferenze generatrici che giacciono sul piano RB_8, menate pel punto (E_8, e_8); quando un tal piano rotando intorno alla retta $(R, \rho r)$ insieme con esse circonferenze generatrici e colle rette ad esse tangenti menate pel punto (E_8, e_8), si abbatte sul piano R_E; perciocchè per le fatte costruzioni è (ε_8, e'_8) la posizione del punto (E_8, e_8), quando il piano RB_8 è abbattuto sul piano R_E, e sono (φ_8, f_8) la posizione del centro della circonferenza dell' anulare projettato in F_8, e (φ'_8, f'_8) quella del centro dell' altra circonferenza dell' anulare projettato in F'_8, entrambe giacenti sul medesimo piano RB_8, quando si è questo messo sul detto piano R_E. Si avranno dunque le projezioni verticali delle rette della rigata richiesta, corrispondenti alle loro projezioni orizzontali RB, RB_1, RB_2, RB_3, . . . trovando le posizioni vere nello spazio delle tangenti menate pei punti e', e'_1, e'_2, e'_3 . . . . , e'_8, e'_9, rispettivamente alle circonferenze di raggio f, f_1, f'_1 . . . . f_7, f'_7, f_8, f'_8, f_9, f'_9, quando i piani di queste, di sul piano R_E sul quale sono state abbattute, col piano su cui sono, ritornano nelle loro posizioni vere, nelle quali posizioni i raggi RB, RB_1, RB_2, . . . RB_7, RB_8, RB_9, sono ad un tempo le tracce e le projezioni orizzontali de' piani di esse circonferenze, su cui esse rette tangenti sono.

Ora delle dette tangenti nelle loro posizioni vere un punto è già dato: e sono, per quelle menate per e'_1, il punto (E_1, e_1), per l' altre menate per e'_2, il punto (E_2, e_2), per l' altre menate per e'_3, il punto (E_3, e_3), e così di seguito. Trattasi per ciascuna di esse determinarne un' altro

Digitized by Google

punto nella posizione vera: ed è utile determinarne quello che è punto di contatto di ciascuna colla circonferenza che tocca.

E per ciò fare sui raggi RB, RB_1, RB_2, RB_3, . . . , a partire dai punti F, F_1, F_2, F_3 . . . , intersezioni di essi colla circonferenza AF'_0FF_0A taglio le parti FP, $F\Pi$, F_1P_1, $F_1\Pi_1$, F_2P_2, $F_2\Pi_2$, . . . $F'_0P'_0$, $F'_0\Pi'_0$, $F'_0P'_0$, $F'_0\Pi'_0$ . . . , ciascuna rispettivamente eguale alle ordinate calate dai punti di contatto sui diametri rispettivi delle circonferenze ordinatamente di raggio f, f_1, f_2 . . . f'_0, f'_0, f'_0 . . ; ed avvertendo di tagliare da F verso R tutte le parti corrispondenti alle circonferenze messe a destra della ρr, uguali alle ordinate dei punti di contatto a sinistra dei diametri, e nel senso contrario le altre uguali alle ordinate dei punti di contatto messi a destra dei diametri medesimi; e per le circonferenze messe a sinistra di ρr tagliare da F'_0, F'_0 ... verso R le parti uguali alle ordinate dei punti messi a destra dei diametri, e nel senso contrario le altre uguali alle ordinate messe a sinistra di ciascuno dei diametri medesimi.

È chiaro che sono P, P_1, P_2, P_3 . . . P'_0, P'_0 . . . le projezioni orizzontali di una serie dei punti di contatto delle rette della rigata colle circonferenze dell' anulare, quando sono nella loro posizione vera, e Π, Π_1, Π_2, ... Π'_0, Π'_0, Π'_0, . . . un' altra serie di analoghi punti.

Per ottenere le projezioni verticali di essi medesimi punti, per P, P_1, P_2, . . . P'_0, P'_0 . . . elevo le perpendicolari alla linea di terra, e pei corrispondenti punti di contatto meno le parallele alla medesima linea di terra; ed altrettanto fo pei punti Π, Π_1, Π_2, . . . Π'_0, Π'_0, Π'_0, . . . I punti p, p_1, p_2, p_3, . . . , p'_0, p'_0, p'_0, . . . , ove

ciascuna incontra la corrispondente orizzontale, sono le projezioni verticali di una prima serie di punti di contatto delle rette della rigata colle circonferenze dell' anulare, quando sono nella loro posizione vera; e $\pi, \pi_1, \pi_2 \ldots, \pi'_9, \pi'_8 \ldots$ quelle di una seconda serie quando sono parimenti nella loro posizione vera; ed i punti $p, p_1, p_2 \ldots p'_9, p'_8 \ldots$ corrispondono alla serie $P, P_1, P_2 \ldots P'_9, P'_8 \ldots$; e gli altri $\pi, \pi_1, \pi_2, \ldots \pi'_9, \pi'_8, \ldots$ alla serie $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi'_9, \Pi'_8 \ldots$

Conduco ora pei punti, p, ed e la retta pe, pei punti p_1, ed e_1, la retta p_1e_1, pei punti p_2, ed e_2, la retta p_2e_2, e così di seguito; ed ottengo una prima serie di rette, projezioni verticali delle rette della superficie rigata. Conduco pei punti π ed e la retta πe, pei punti π_1 ed e_1, la retta π_1e_1, per gli altri π_2 ed e_2 la retta π_2e_2, e così di seguito: ed ottengo una seconda serie di rette, projezioni verticali delle rette della superficie rigata richiesta.

86. Data dunque la retta (IH, hi) nello spazio; ed il punto determinatore D, la retta direttrice $(R, \rho r)$, ed i parametri M ed N dell' anulare, ho costrutta la superficie rigata che tocca l' anulare, e le di cui rette generatrici si appoggiano alla data retta (IH, hi) ed alla data direttrice $(R, \rho r)$ dell' anulare. Le rette (PE, pe), (P_1E_1, p_1e_1), (P_2E_2, p_2e_2), ... sono una prima serie di rette della rigata; le rette $(\Pi e, \pi e)$, (Π_1E_1, π_1e_1), (Π_2E_2, π_2e_2), ... ne sono una seconda.

87. In ordine al piano $R\beta$ parallelo alla retta data (IH, hi) non può procedersi come ho fatto; perciocchè, come è manifesto, il raggio $R\beta$ non incontrando la projezione orizzontale IHE della retta data, non dà nessun punto analogo agli e', e'_1, e'_2, ... pel quale menare le rette tangenti alle circonferenze su di esso piano. Ma sono da

Digitized by Google

menarsi invece rette ad essa tangenti parallele alla retta data: essendo che il piano loro ed essa retta può stimarsi s' incontrino all' infinito. Però dal punto R calo la perpendicolare RE_4 alla IH, taglio la $\rho i'$ uguale alla E_4I, e la $\rho H'$ uguale alla E_4H; e sulla verticale eretta per H', taglio $H'h'$ uguale alla Hh. Onde è $i'h'$ la retta alla quale debbe menarsi parellela la tangente alla circonferenza il di cui centro è projettato in F'_{11}. E per la qual cosa essendo essa circonferenza, quando abbattuta sul piano $R\varepsilon$, quella di raggio f_1, ottengo il punto di contatto nella intersezione di essa circonferenza colla perpendicolare $f_1\alpha$ alla retta $i'h'$.

88. Dal detto nel numero 85 emerge implicitamente essere (P,p), (P_1,p_1), (P_2,p_2) . . . (P'_9, p'_9), (P'_8, p'_8). . . una prima serie de' punti della linea di contatto della costrutta superficie rigata coll'anulare, e (Π, π), (Π_1, π_1) . . . (Π'_9, π'_9), (Π'_8, π'_8) . . . una seconda serie di essi medesimi punti. Perciocchè sono punti di contatto di ciascuna retta della rigata, con ciascuna circonferenza dell'anulare. Conduco dunque pei punti $P, P_1, P_2, \ldots P_9, P_8, \ldots$ la linea PP_1P_2AP, e pei punti $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots$ l'altra $\Pi\Pi_3A\Pi$. Costituiscono queste la projezione orizzontale della curva di contatto delle due superficie. E conduco una linea pei punti $p, p_1, p_2, p_3 \ldots$, ed un' altra pei punti $\pi, \pi'_1, \pi'_2 \ldots$. Le curve pp_3a, $\pi\pi_3a$ costituiscono la projezione verticale della curva di contatto delle due superficie.

89. È manifesto che in projezione orizzontale sono punti visibili della curva, tutti quelli che provengono da punti di contatti esistenti nelle metà superiori delle circonferenze di raggio $f, f_1, f_2 \ldots f'_9, f'_8, \ldots$; e ne sono punti invisibili tutti gli altri che provengono da punti di

contatto giacenti nella metà inferiore di esse medesime circonferenze: e parimenti che in projezione verticale sono punti visibili tutti quelli che provengono da punti di contatto delle circonferenze di centro $f, f_{,}, f_{,}, \ldots$ giacenti su parti di esse circonferenze che l' anulare lascerebbe vedere; e punti invisibili tutti quelli provenienti dai punti di contatto giacenti su parti di esse medesime circonferenze che l' anulare non lascerebbe vedere. Ed è con queste norme che ho diseguate le projezioni delle dimandate curve di contatto.

In quanto alle generatrici della superficie rigata dimandata, per non ingenerare confusione, ho supposta rimossa tutta la parte dell' anulare anteriore al piano $R\varepsilon$ parallelo al piano verticale di projezione e menato per la retta (R, ρ^r) direttrice dell' anulare.

COROLLARIO I.

90. Può osservarsi che da ciascuno dei punti $e', e'_{,}, e'_{,}, \ldots$ corrispondenti rispettivamente a ciascuno dei punti (E, e), $(E_{,}, e_{,})$, $(E_{,}, e_{,}) \ldots$ della retta data (IH, hi), possono menarsi quattro rette tangenti (85) alle circonferenze, che nella loro posizione vera giacciono rispettivamente sui piani RB, $RB_{,}$, $RB_{,}\ldots$, le quali incontrano la retta data ordinatamente in essi punti (E, e), $(E_{,}, e_{,})$, $(E_{,}, e_{,}) \ldots$ Onde segue che per ogni punto della retta data (IH, hi) passano quattro rette generatrici della costrutta superficie rigata che tocca l' anulare.

Dunque la retta data è una linea quadrupla della superficie rigata.

Digitized by Google

COROLLARIO II.

91. In ogni circonferenza di centro $f, f_{,}, f_{,,}, \ldots$ sono due punti di contatto distinti, i quali giacciono da due parti opposte della retta che passerebbe per ciascun punto $e', e'_{,}, e'_{,,}, \ldots$ e pel centro della corrispondente circonferenza; onde poi (88) vi sono due serie di punti di contatto, e due serie di rette della rigata. Ne segue dunque che la costrutta rigata tangente all' anulare ha due falde distinte; e la curva di contatto due rami distinti.

COROLLARIO III.

92. Per lo punto R può menarsi una retta che passa pel punto determinatore D. Ed il piano, di cui una tal retta è projezione, taglia l' anulare nel nodo e nella sua circonferenza massima (17). Dunque pel punto (E, e) d' incontro di questo piano RBE colla retta data possono menarsi solo due tangenti alla circonferenza, cui corrisponde quella di centro f, ed una terza retta che passa pel nodo (A, a) dell' anulare.

Dunque le due falde della costrutta anulare tangente si tagliano o si toccano secondo una loro retta comune, che passa pel nodo dell' anulare; e che però è retta doppia della rigata. Ed i due rami della curva si tagliano o toccano nel nodo medesimo; il quale punto sarà punto doppio di essa curva di contatto.

Digitized by Google

PROPOSIZIONE NONA

Dati i determinanti della superficie, ed una retta: menare il piano tangente alla superficie, per la retta data.

93. Costruisco la superficie rigata le di cui rette toccano la superficie data, e si appoggiano alla retta direttrice di questa, ed alla retta data; e costruisco la linea di loro contatto.

Per la retta data meno un piano che passi per una delle rette della superficie rigata, ed immaginando che un tal piano passi sempre per la retta data, e si vada successivamente appoggiando a tutte le altre rette della rigata, costruisco i successivi punti di contatto di ciascuno di essi piani con essa rigata; li quali punti sempre esistono, come è noto per la teorica delle superficie rigate non sviluppabili; ossia costruisco la curva che è il luogo di essi punti di contatto.

La intersezione di quest'ultima curva, coll'altra che è curva di contatto dell'anulare data colla costrutta rigata suddetta, è il punto di contatto. Ed un piano menato per questo, e per la retta data è il piano tangente dimandato.

Di fatto il determinato punto di contatto appartenendo alla curva di contatto dell'anulare colla rigata, il piano che passa per esso punto, e per la retta data, passerà per quella retta della superficie rigata medesima, che passa per esso medesimo punto di contatto. Ma un tal punto è punto del luogo dei punti di contatto della rigata con ciascun piano di ciascuna sua retta e della retta data. Dunque in un tal punto esso piano tocca la superficie rigata.

Digitized by Google

Ma questa tocca l' anulare secondo una linea che passa per quel punto : dunque il detto piano tocca la superficie anulare data in esso medesimo punto , intersezione delle dette due linee; ed esso punto è in vero il punto di contatto.

TAV. IX. 94. Sia ora piano orizzontale di projezione, il piano normale alla retta direttrice della superficie anulare, e che passa pel suo punto determinatore. E sia D il punto determinatore, (R, pr) la retta direttrice, M ed N in grandezza i parametri maggiore e minore della superficie, ed (IH, hi) la retta data. Debbo per la retta (IH, hi) menare il piano tangente alla superficie di punto determinatore D, retta direttrice (R, pr), e parametri M, ed N.

95. Pei punti D ed R, tiro la retta DR, e da R verso E taglio RC uguale alla differenza del parametro maggiore M sul minore N. Col centro R e raggio uguale N, descrivo la circonferenza $AB_6'BB_6A$; col centro C e raggio M descrivo l' altra circonferenza $AF_6'FF_6A$; e divisa la semicirconferenza BB_6A in un certo numero di parti uguali, BB_1, B_1B_2, B_2B_3 . . . — in dodici, tiro pei punti di divisione i raggi RB, RB_1, RB_2, RB_3 . . .

Dopo ciò pel lemma precedente costruisco la superficie rigata le di cui rette toccano l' anulare, e si appoggiano ad un tempo alla sua retta direttrice (R, pr), ed alla retta data (IH, hi) ; e propriamente quelle sue rette le di cui projezioni orizzontali sono i raggi RB, RB_1, RB_2... : e costruisco la projezione orizzontale $AP_6'PP_1A$, $A\Pi'_6\Pi\Pi'_1A$; e la projezione verticale app_1pa, $a\pi\pi_1\pi a$ della curva di contatto di essa superficie rigata coll' anulare.

96. Se ora per la retta data (IH, hi), e per una qualunque delle rette (PE, pe), (P_1E_1, p_1e_1), (P_2E_2, p_2e_2) ...

Digitized by Google

$(\Pi E, \pi e)$, $(\Pi_1 E_1, \pi_1 e_1)$, $(\Pi_2 E_2, \pi_2 e_2)$, . . . conduco un piano; un tal piano toccherà la superficie rigata in un punto di ciascuna di esse medesime rette per la quale passa. E la curva luogo geometrico di tutti essi punti di contatto debbo (93) costruire.

Considero la retta (P_1E_1, p_1e_1) della superficie rigata. E per essa e per la retta data (III, hi) conduco un piano. Perciò determino il punto (G, g), ove la retta (P_1E_1, p_1e_1) incontra il piano verticale di projezione, ed il punto (H, h) ove lo incontra la retta data. La retta gh menata pei punti g, h, è la traccia verticale del piano che passa per la retta (P_1E_1, p_1e_1) della rigata, e per la data (IH, hi). Similmente determino il punto (K, k), ove la medesima retta (P_1E_1, p_1e_1) incontra il piano orizzontale di projezione, e l'altro (I, i), ove lo incontra la data (IH, hi). La retta IK è la traccia orizzontale del piano che passa per le rette istesse (P_1E_1, p_1e_1), (IH, hi).

Per trovare il punto della retta (P_1E_1, p_1e_1), ove il piano delle tracce IK, gh, tocca la superficie rigata, determino i punti d'intersezione di esso piano colle rette (P_1E_1, p_1e_1), (P_3E_3, p_3e_3), che prendono in mezzo la (P_1E_1, p_1e_1), per la quale esso piano passa. Perciò, in ordine alla prima di esse rette, segno il piano projettante tsS, e pei notissimi metodi costruisco la intersezione sua ST col piano delle tracce IK, gh: la intersezione V della ST colla P_1E_1, è la projezione orizzontale dell'incontro della retta (P_1E_1, p_1e_1) col piano IK, gh. Similmente costruendo la intersezione $S'T'$ del piano projettante $e_3p_3s'S'$, della retta (E_3P_3, p_3e_3), col medesimo piano IK, gh, determino il punto V' di sua intersezione con essa retta (E_3P_3, p_3e_3).

Come è noto per la teorica delle superficie rigate non sviluppabili, sono V, V', due punti della projezione oriz-

zontale della curva d'intersezione del piano tangente IK, gh, alla superficie rigata di che si tratta, con essa medesima superficie; la intersezione della quale curva colla retta P_2E_2 (posta in mezzo alle due P_1E_1, P_3E_3, cui appartengono i punti V, V'), dà il punto di contatto del piano (IK, gh), delle rette (IH, hi), (P_2E_2, p_2e_2) colla superficie rigata, della quale quest'ultima retta n'è una.

Congiungo dunque i punti V, V'. E la intersezione Q_2 della VV' colla P_2E_2 è la projezione orizzontale del punto di contatto del piano IK, gh, colla superficie rigata; ossia è Q_2 la projezione orizzontale di un punto del luogo di che si tratta; e (Q_2, q_2) un tal punto.

Operando nella stessa guisa per ciascuna delle altre rette, (P_1E_1, p_1e_1), (P_3E_3, p_3e_3), (P_4E_4, p_4e_4), ... ; cioè menando per ciascuna di esse e per la retta data (IH, hi) un piano, e determinando l'incontro di esso colle rette laterali a ciascuna di quelle della superficie rigata per le quali esso passa, ottengo altri punti Q, Q_3, Q_4 . . . della projezione orizzontale del luogo, e quindi esso medesimo luogo (QQ_2Q_3, qq_2q_3).

97. Dunque il punto (Q_4, q_4) ove questo luogo incontra il ramo ($AP_6'PA$, app_3) della costrutta curva di contatto della rigata coll'anulare, è il punto di contatto (93) del dimandato piano tangente all'anulare data, menato per la retta data (IH, hi).

Per costruire le effettive tracce del piano, trovo i punti d'incontro coi piani di projezione della retta della rigata che passa pel punto di contatto, (Q_4, q_4); e pel trovato suo punto d'incontro X col piano verticale e pel punto h, meno la retta hX, e pel suo punto d'incontro Z ed il punto I meno la retta IZ. Il piano delle tracce ZI, Xh, è il

piano tangente richiesto all' anulare di punto determinatore D, retta direttrice $(R, \rho r)$, e parametri M ed N, menato per la retta data (IH, hi).

COROLLARIO.

98. Ho dedotto di sopra (91) che la superficie rigata, le di cui rette toccano l'anulare, e si appoggiano alla retta direttrice di questa ed alla retta data, ha due falde, le quali hanno una retta doppia che passa pel nodo dell'anulare (92); e che la retta data, alla quale si appoggiano le rette della rigata, n'è una retta quadrupla (90). Vi saranno dunque una serie di punti (Q, q), (Q_1, q_1), (Q_2, q_2)... del costrutto luogo, corrispondenti alla falda la cui linea di contatto coll' anulare è data dai punti (P, p), (P_1, p_1), (P_2, p_2) . . . ; ed un'altra serie di punti di esso luogo, che corrispondono all'altra falda della rigata, la cui linea di contatto coll' anulare è data dall' altra serie (Π, π), (Π_1, π_1), (Π_2, π_2), . . . di punti.

Potranno dunque essere quattro i piani tangenti all'anulare di che si tratta; perciocchè su ciascuna falda possono aversi due punti d'intersezione delle curve da costruirsi (93), i quali sono però punti di contatto.

Se per avventura fosse così data la retta nello spazio, che il luogo dei punti di contatto della rigata, con tutti i piani che passano per ciascuna sua retta data, andasse a passare pel nodo dell'anulare; in un tal caso, i piani tangenti potrebbero ridursi a tre. E potrebbero ridursi a due, ed anche ad uno, quando la retta data non giacesse tutta al di fuori dell'anulare, ma s' internasse in essa; perciocchè allora la rigata non toccherebbe l' anulare

Digitized by Google

in tutte le sue circonferenze: e per poco che si consideri la natura e la genesi dei due rami di ciascuna curva, le intersezioni dei quali danno i punti di contatto, può di leggieri scorgersi, quando sarà che avrà luogo ciascun caso in cui i piani tangenti potranno essere quattro, tre, due, od anche un solo.

SCOLIO I.

99. Le date soluzioni per menare un piano tangente alla superficie di che si tratta sono applicabili, come è chiaro, ad ogni superficie anulare a retta direttrice; cioè ad ogni superficie anulare i piani delle di cui circonferenze generatrici passano per una stessa retta fissa: che anzi tutto quel poco, che ho fin qui detto intorno alle costruzioni grafiche, può applicarsi a tutte esse.

Di fatto s' immagini esistere la superficie anulare a retta direttrice la più generale: e per fissare le idee si supponga che la retta direttrice sia verticale. Se ora s' intendano condotte delle rette orizzontali tangenti per di sotto a tutte le generatrici; tutte cosiffatte tangenti costituiranno una superficie rigata a piano direttore. Similmente pei centri di tutte le generatrici s' intendano condotte delle rette verticali; tutte queste costituiranno un cilindro a lati paralleli alla direttrice. In oltre s' intendano condotte delle rette verticali tangenti a tutte le generatrici, dalla stessa parte verso la retta direttrice; tutte queste tangenti genereranno un altro cilindro, di rette parallele alla direttrice, ma di minore ampiezza del primo. Le generatrici dunque tutte toccano il cilindro di ampiezza minore e la superficie rigata a piano direttore, e ciascuna individuata ha il suo

Digitized by Google

centro allogato sul cilindro maggiore, ed alto sulla superficie rigata a piano direttore per la distanza dei lati dei due cilindri, i quali sono sul piano della individuata generatrice.

Sostituendo ora al piano condotto pel punto determinatore perpendicolare alla direttrice (33) la superficie rigata a piano direttore, si costruiranno colle debite modificazioni, e come è detto nelle proposizioni precedenti, le projezioni dei punti della curva dei centri, le projezioni dei punti della superficie; e quindi la stessa curva dei centri e la superficie.

100. Di questa superficie anulare a retta direttrice la più generale, tutte le generatrici toccano la superficie rigata a piano direttore, secondo una linea storta. Questa linea sarà una caratteristica della superficie anulare, considerata come inviluppo di superficie rigate; della quale la inviluppata corrispondente ad essa curva storta è la medesima contemplata superficie a piano direttore. Ora a partire dai punti delle generatrici appartenenti alla detta curva storta, s' immaginino divise tutte le circonferenze generatrici in un egual numero di parti uguali; i punti di divisione di ugual sede saranno punti di altrettante caratteristiche della superficie anulare; e tutte le rette tangenti ad esse generatrici, in tutti cotesti punti di divisione di ugual sede, costituiranno ciascuna superficie rigata inviluppata della superficie, che la tocca secondo quella caratteristica che è ad un tempo il luogo dei punti di divisione di ugual sede delle circonferenze, nei quali sono da esse rette tangenti toccate. Quindi anche alla superficie anulare a retta direttrice la più generale, essendo inviluppo di una superficie rigata, può nei modi innanzi esposti menarsi il piano tan-

Digitized by Google

gente alla superficie: e la costruzione di una individuata inviluppata per un punto dato sulla superficie, non sarà dissimile da quella del penultimo Lemma; perciocchè la serie dei triangoli rettangoli determinatori delle ordinate delle projezioni di una caratteristica, si costruiranno in egual modo (74); e solo le ordinate della projezione verticale, ciascuna uguale all' ipotenusa più uno dei cateti di essi triangoli dovranno computarsi non dalla linea di terra, ma dalla corrispondente projezione verticale della corrispondente retta della superficie rigata a piano direttore dalla quale si computano le altezze dei centri. La quale superficie però, nel caso della superficie anulare a retta direttrice generale potrebbe prendere il posto del punto determinatore, e prendere il nome di *superficie rigata determinatrice*. Nè sarà molto dissimile da quella del Lemma precedente la costruzione di una rigata, le di cui rette toccano l'anulare, e si appoggiano alla sua direttrice e ad una retta data (*).

(*) La espressione analitica dell'anulare a retta direttrice la più generale (come ho dimostrato in quella parte delle mie ricerche analitiche sulle superficie anulari già pubblicate) è

$$(z-\varphi_3)^2+(\sqrt{x^2+y^2}-\varphi_2)^2=2\varphi_1(z-\varphi_3)$$

nella quale, x, y, z sono le tre coordinate, riferite a tre assi ortogonali, del quale quello delle z è la retta determinatrice medesima; e φ_1, φ_2, φ_3 tre funzioni arbitrarie del rapporto $\frac{y}{x}$ delle due coordinate x ed y.

La espressione della inviluppata rigata

$$z+\tau\sqrt{x^2+y^2}=(1-\sqrt{1+\tau^2})\varphi_1+\tau\varphi_2+\varphi_3$$

nella quale τ esprime la cotangente dell' angolo costante, che ciascuna retta della inviluppata fa colla direttrice dell' anulare.

E la espressione della caratteristica è

$$(z-\varphi_3)^2+(\sqrt{x^2+y^2}-\varphi_2)^2=2\varphi_1(z-\varphi_3)$$
$$\sqrt{x^2+y^2}-\varphi_2=\tau(z-\varphi_3-\varphi_1)$$

Digitized by Google

101. E come la data soluzione per ciascun problema del piano tangente può accommodarsi alla superficie anulare a retta direttrice la più generale, così dalla soluzione medesima può farsi dipendere quella del piano tangente alla superficie anulare a retta direttrice la più semplice, cioè alla superficie del toro. Ed in quanto al piano tangente a questa superficie per un punto dato su di essa; le sue circonferenze generatrici essendo di grandezza costante, le superficie rigate inviluppate, per essa, sono dei coni retti aventi la retta direttrice per asse, e la caratteristica per base; e la paraboloide iperbolica tangente alla inviluppata (80)', quivi si trasforma in un piano tangente al cono, pel punto di contatto dato, il quale vi si mena conducendolo per la retta del cono che è tangente alla generatrice che passa pel punto dato, e per la retta tangente alla base del cono nel punto cui si appoggia la detta retta; la quale base del cono è qui la caratteristica della superficie, ed è un parallelo della superficie, come la generatrice ne è un meridiano. Onde applicando alla superficie anulare del toro la riportata soluzione pel piano tangente alla superficie anulare di che si tratta per un punto dato su di essa; essa riducesi a menare un piano per le rette tangenti al meridiano ed al parallelo che passano pel punto dato; che è la soluzione degli elementi.

SCOLIO 2.

102. La superficie anulare a retta direttrice ha tutte le sue generatrici su piani che passano per essa retta, e secondo essa retta tutti si tagliano. Se cotesti piani non passassero per essa retta, a due a due si taglierebbero secondo diverse

Digitized by Google

rette; le quali però a due a due sarebbero allogate su di un medesimo piano. Quindi la retta direttrice sarà rimpiazzata da una *superficie sviluppabile direttrice*; ed i due cilindri innanzi notati (99), lo saranno da due superficie pure sviluppabili a rette parallele alla sviluppabile direttrice, delle quali quella di ampiezza maggiore avrà su di essa la curva dei centri, e l'altra di ampiezza minore avrà le sue rette continuamente toccate dalle generatrici della superficie anulare; e la superficie rigata a piano direttore dalla quale si computavano le altezze dei centri delle generatrici della superficie anulare (100), sarà sostituita da una superficie rigata le di cui rette staranno su piani ciascuno perpendicolare alla retta di contatto del piano della rispettiva circonferenza generatrice colla superficie sviluppabile direttrice.

Onde la superficie anulare la più generale può aversi generata da una circonferenza di circolo la quale si muova:

1.° toccando col suo piano una superficie *sviluppabile direttrice*:

2.° avendo sempre il raggio in grandezza uguale alla distanza delle rette sul piano, di due superficie sviluppabili l'una maggiore e l'altra minore, ad elementi paralleli agli elementi della superficie sviluppabile direttrice:

3.° ed avendo sempre il centro alto pel raggio da una superficie rigata ad elementi perpendicolari alla retta della sviluppabile direttrice, secondo il contatto del piano della corrispondente circonferenza generatrice con essa.

Però la superficie anulare la più generale avrà.

1.° una superficie *sviluppabile direttrice*:

2.° una superficie *rigata determinatrice* ad elementi perpendicolari agli elementi della superficie direttrice:

Digitized by Google

3.° dei parametri che danno le curve sur uno dei piani di projezione o sulla superficie rigata determinatrice, alle quali si appoggiano delle rette parallele agli elementi della superficie direttrice.

E questi sono i determinanti della superficie anulare la più generale (*). Di fatto descritte le curve date dai detti parametri, per un punto di una di essa si conduca un piano tangente alla superficie *sviluppabile direttrice*; questo piano taglia l'altra curva in un punto, e la superficie *rigata determinatrice* secondo una sua retta. Pel punto della curva per lo quale si è condotto il piano tangente, e pel punto ove esso piano taglia l'altra curva, si conducano due rette parallele alla retta di contatto del piano colla superficie sviluppabile determinatrice; la distanza di queste due rette darà in grandezza il raggio della circonferenza generatrice della superficie anulare generale, su quel piano. Su quella delle dette due rette, che si appoggiano ai determinati punti delle dette due curve, la quale è la più distante dalla sviluppabile direttrice, si segua un punto distante dall'incontro di essa retta colla costrutta retta della superficie rigata determinatrice, per quanto è il determinato raggio in grandezza: un tal punto sarà il centro della circonferenza generatrice della superficie anulare generale, del determinato raggio. Però, come diceva, le cose dette di sopra sono i determinanti della superficie anulare la più generale; perciocchè date esse cose, può sempre con non difficili costruzioni determinarsi una individuata sua generatrice.

(*) Ho dimostrato nelle mie Generalità Geometriche sulle superficie anulari, inserite nel fasc. del 30 settembre 1844 del Museo di Scienze e Letteratura che si stampa in Napoli, che pel variare di natura dei primi due determinanti suddetti, tutte le superficie anulari vanno distinte in undici grandi Classi.

Digitized by Google

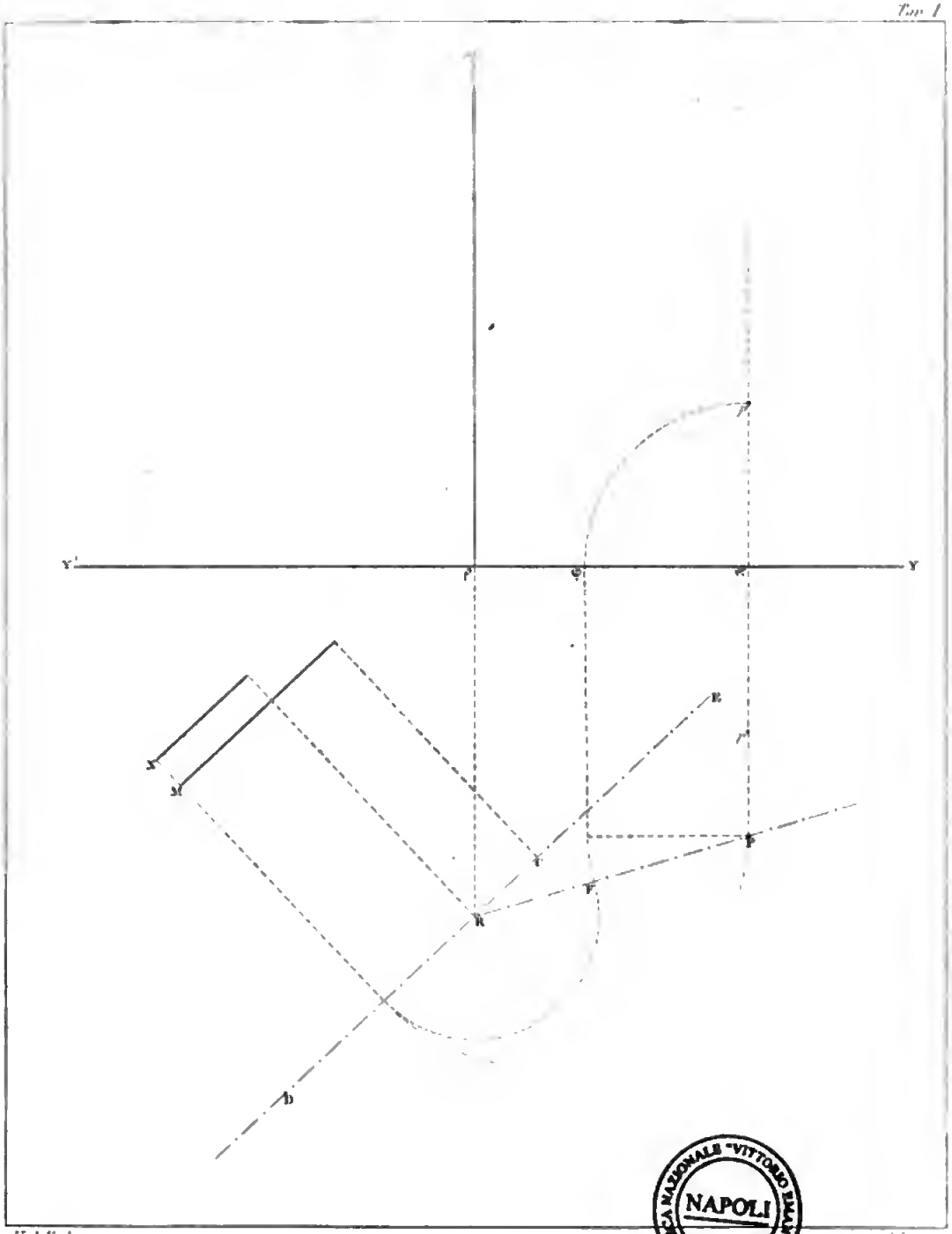
E la serie di tutte le intersezioni od incontri di ciascuna retta parallela ad una individuata retta della sviluppabile direttrice, e più lontana da essa, colla superficie rigata determinatrice, costituirà una delle curve caratteristiche della superficie anulare, considerata come inviluppo di superficie rigate; e delle quali la determinatrice è una delle inviluppate. Onde dai punti di ciascuna circonferenza generatrice, appartenenti alla detta caratteristica, computando le divisioni di tutte esse circonferenze in un egual numero di parti uguali, si avranno nei punti di divisione di ugual sede i punti di una medesima di tutte le altre caratteristiche della superficie anulare generale considerata come inviluppo d'inviluppate rigate. E quindi si costruiranno ciascuna di coteste inviluppate che passa per un dato punto della superficie inviluppo.

Dopo tutte le quali cose è dunque manifesto che la riportata soluzione del piano tangente per un punto dato su la superficie, può del pari accommodarsi a qualunque siasi superficie anulare; ed eziandio le poche costruzioni grafiche che ho precedentemente esposte. E se si consideri che ogni retta nello spazio può sempre incontrare o a distanza finita, od all'infinito i piani delle circonferenze generatrici della superficie anulare la più generale, si comprende del pari, come la data soluzione del piano tangente per una retta data fuori la superficie, può accommodarsi ancora a qualunque siasi superficie anulare.

FINE.

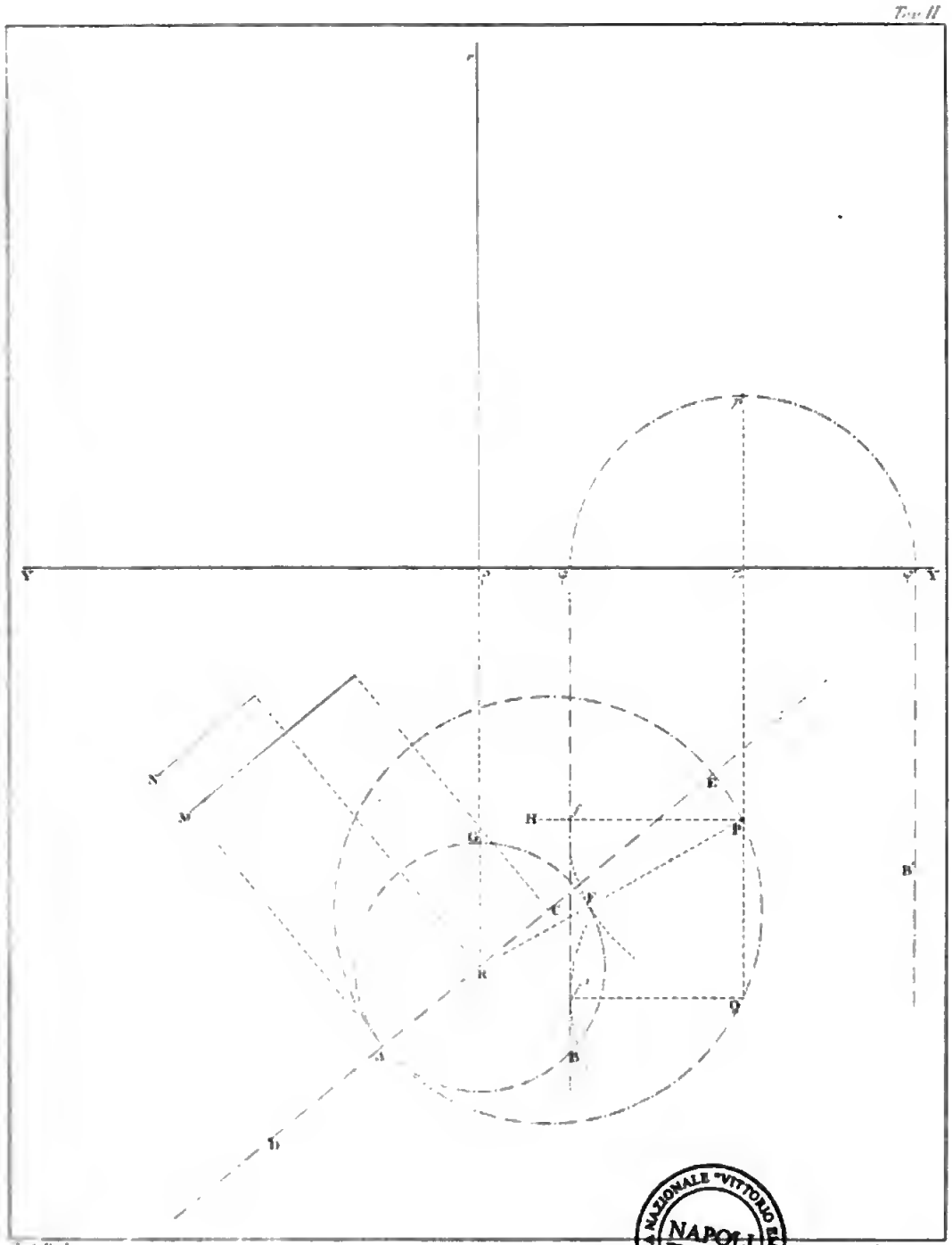
SBN 607938

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

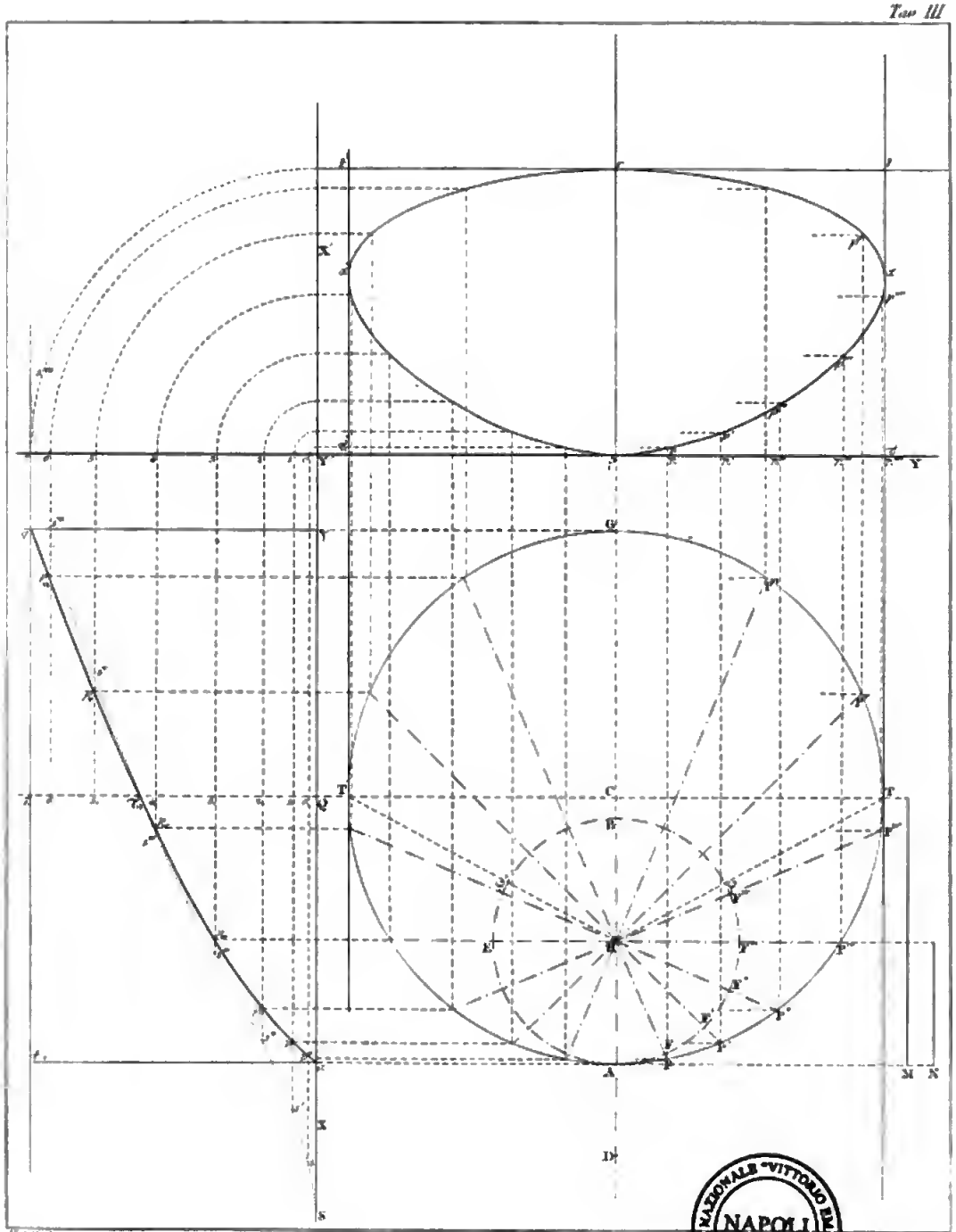
Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Digitized by Google

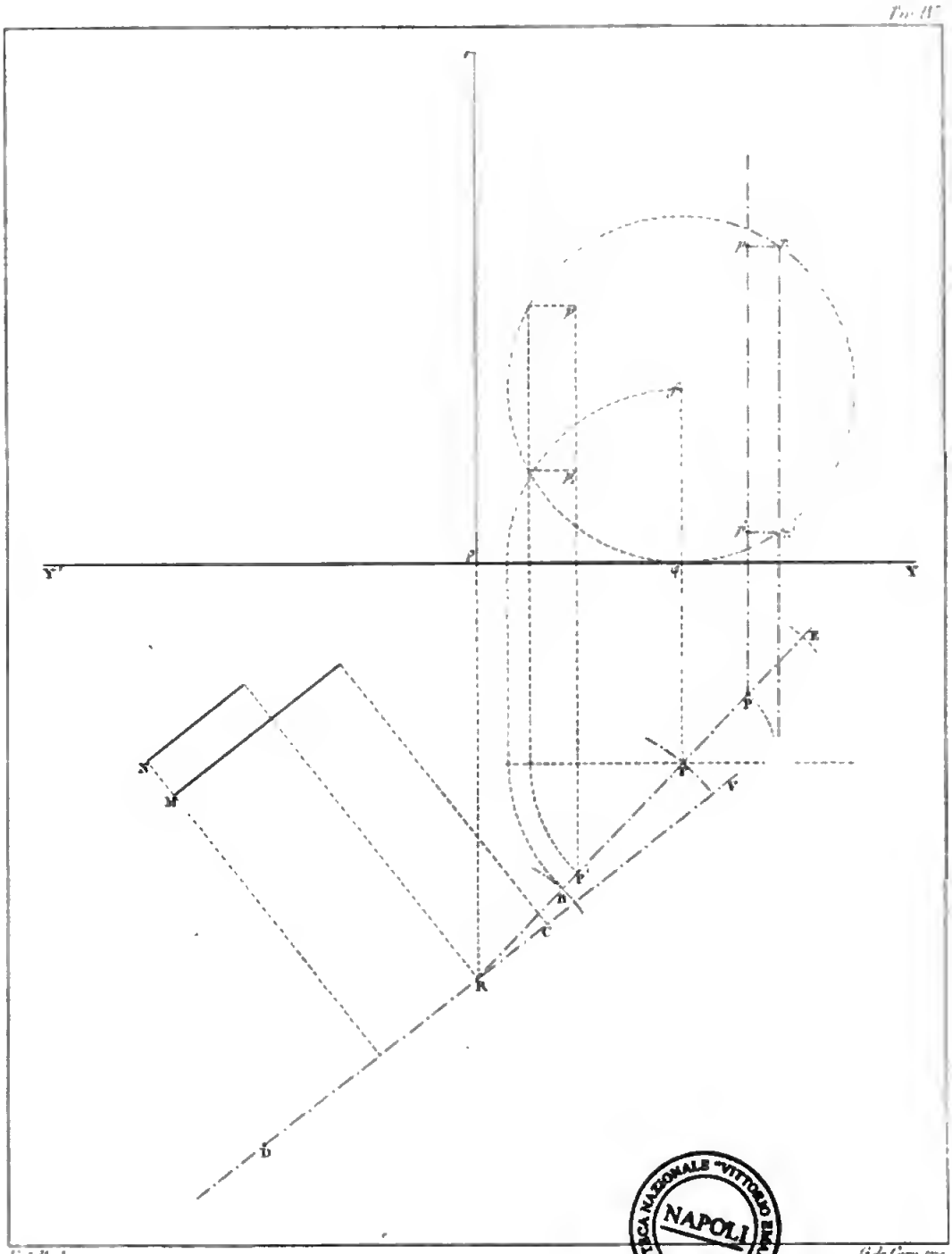
Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

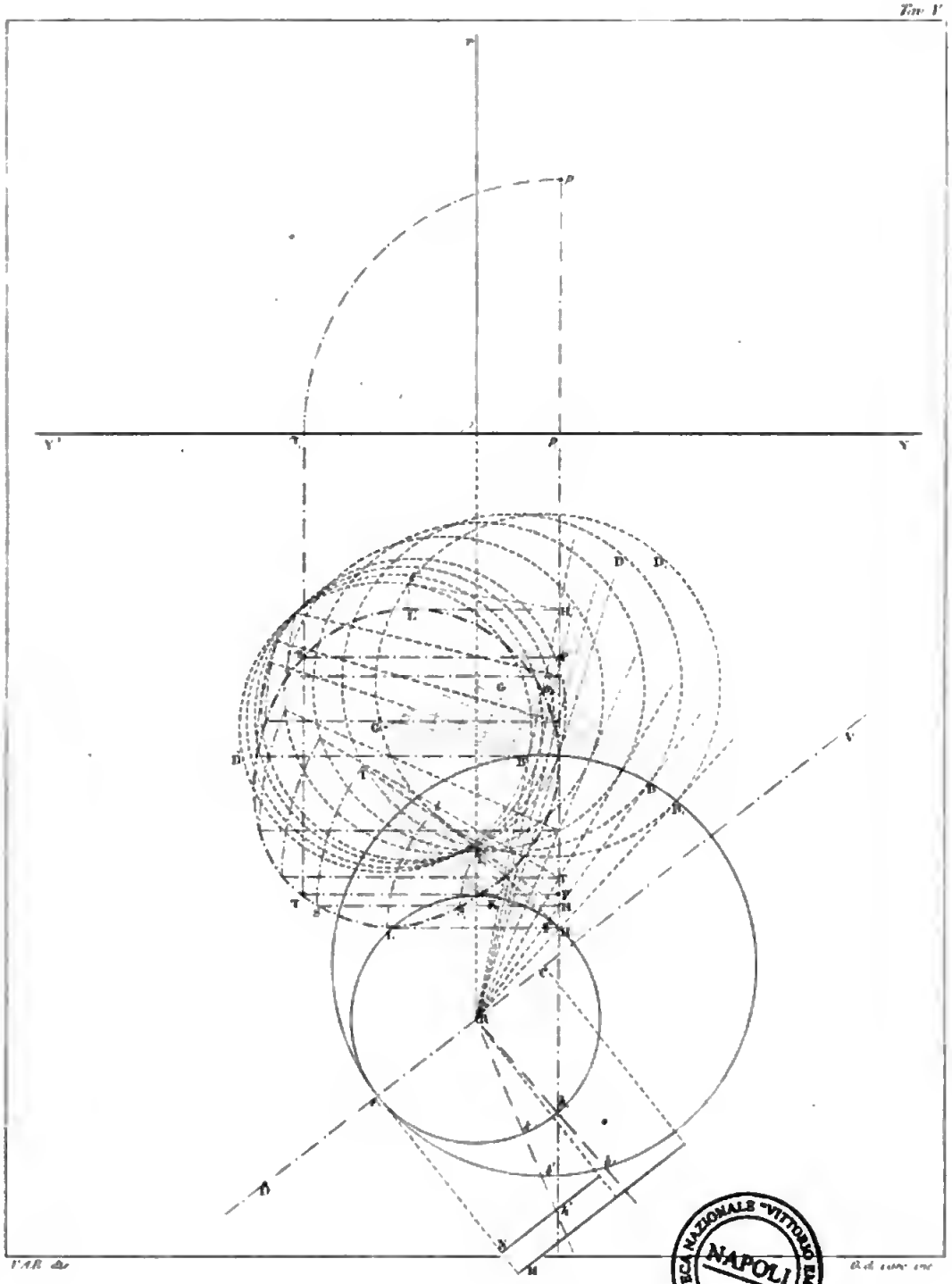
Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Digitized by Google

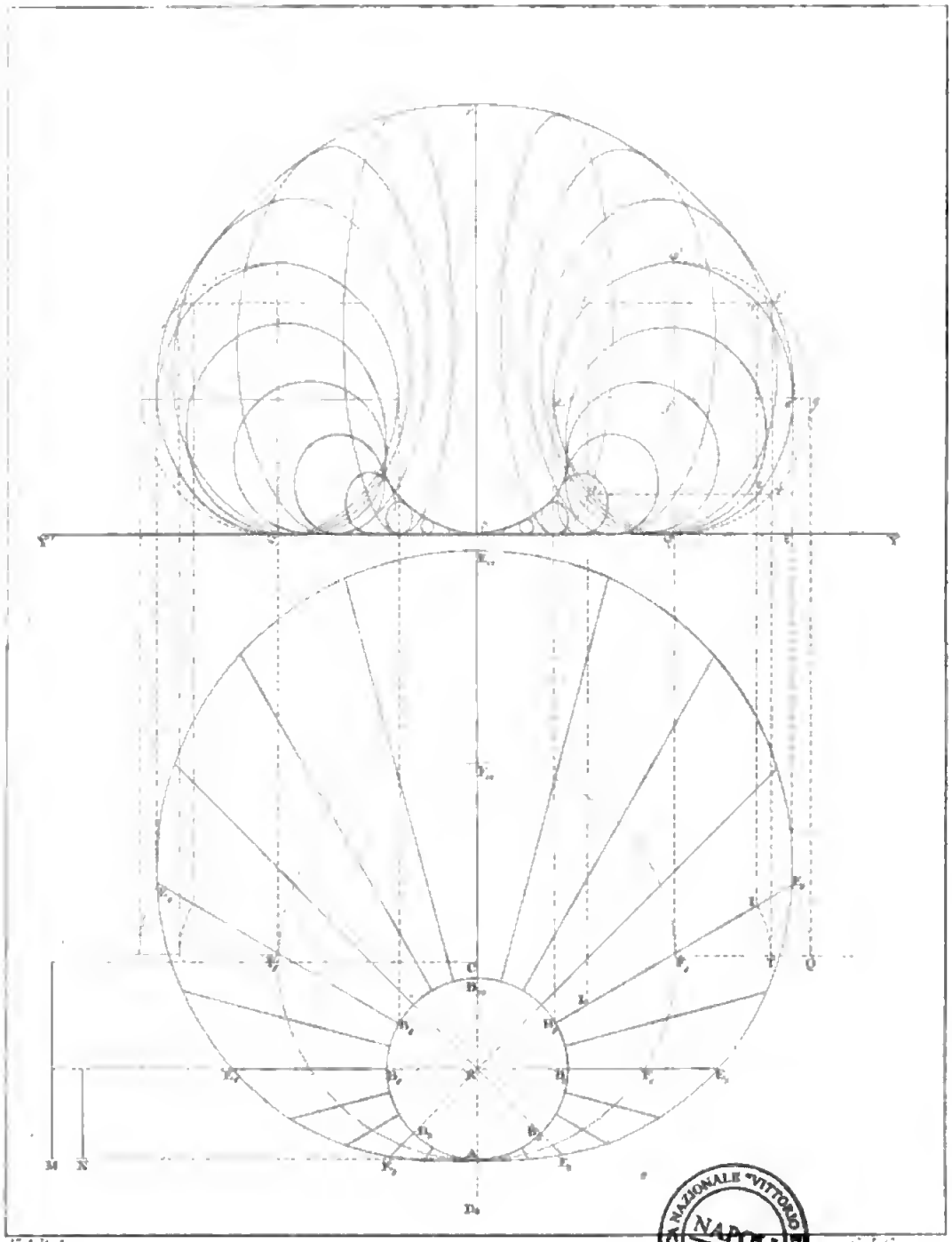
Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

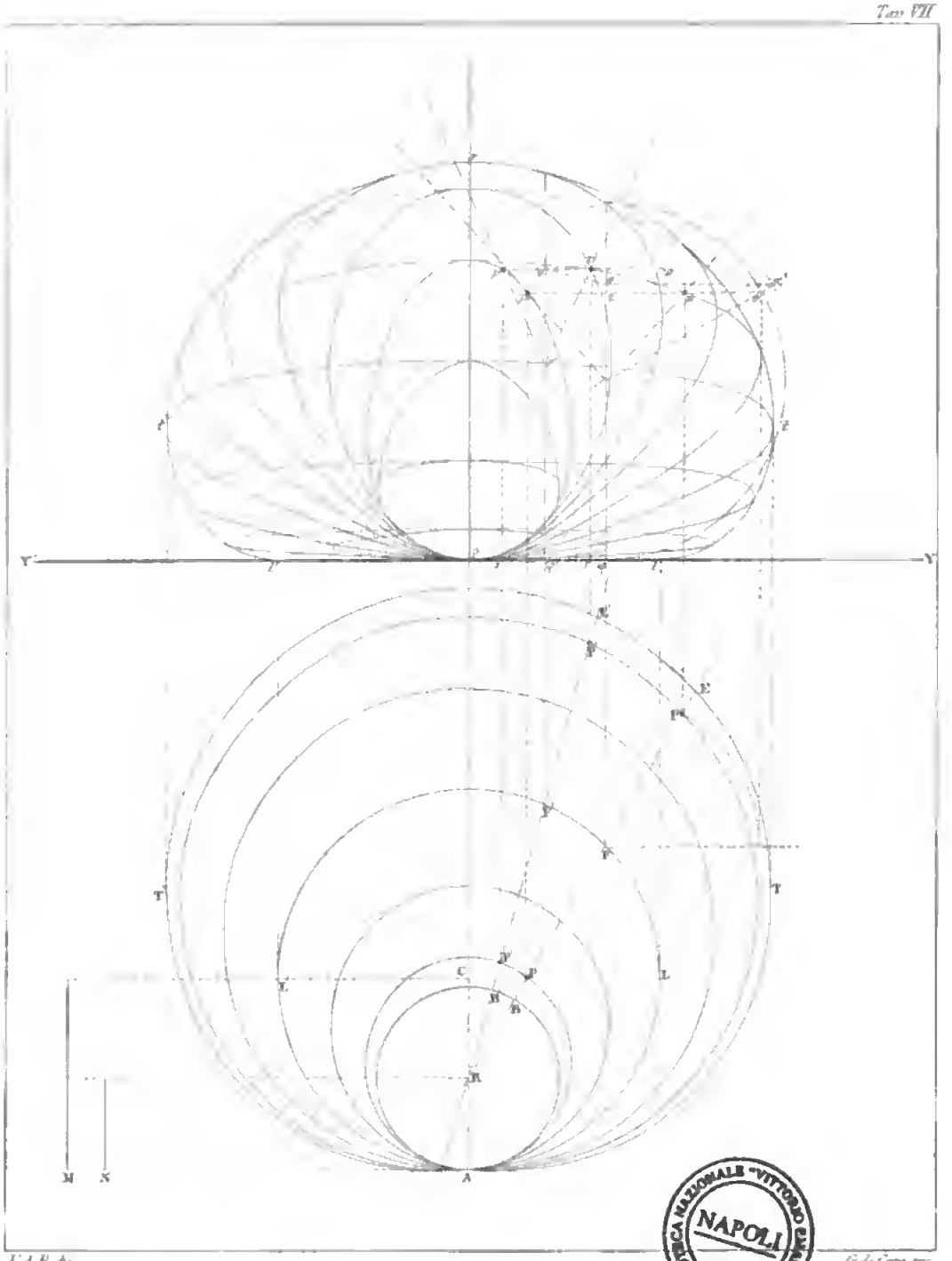
Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

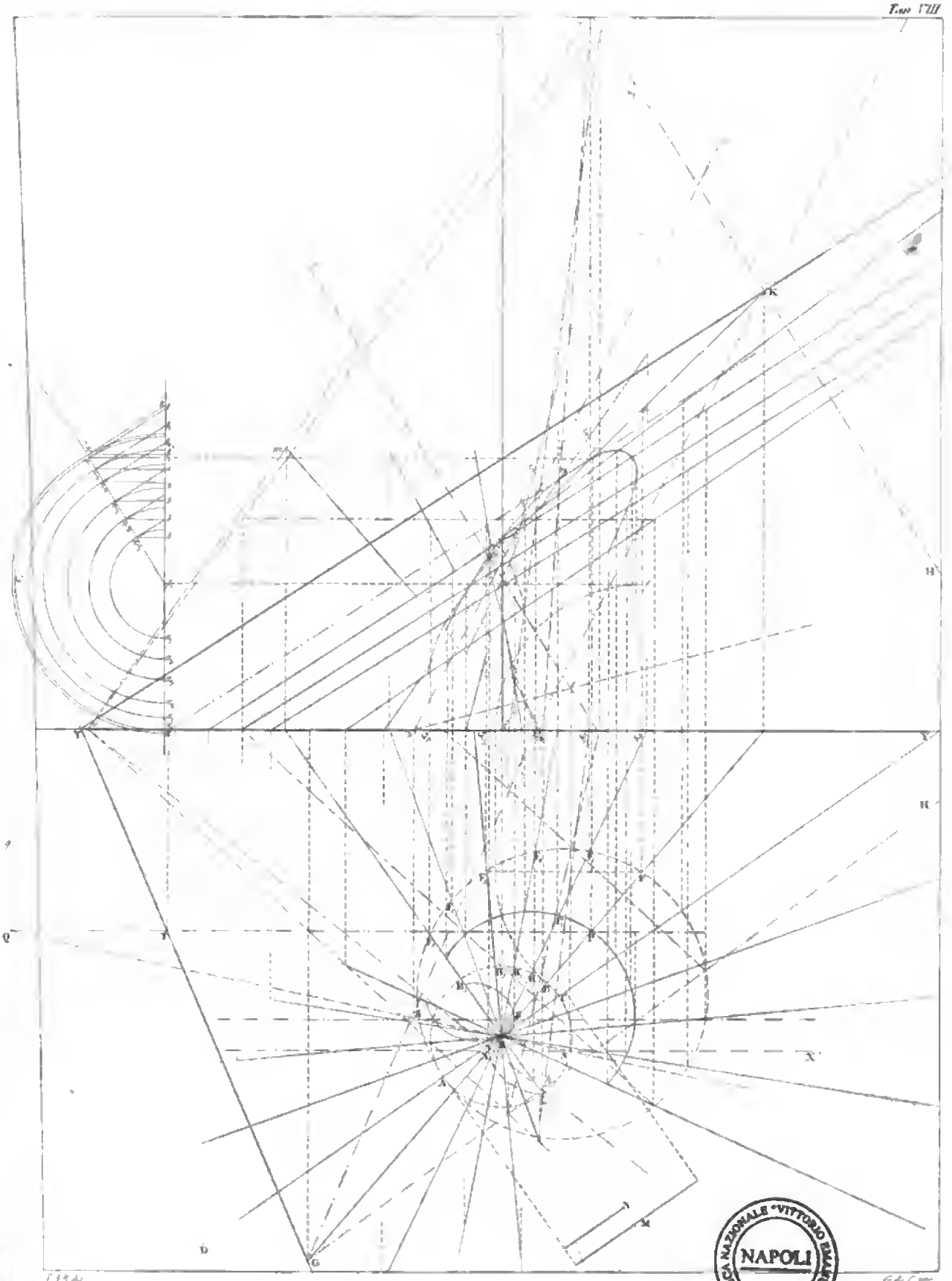
Digitized by Google

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

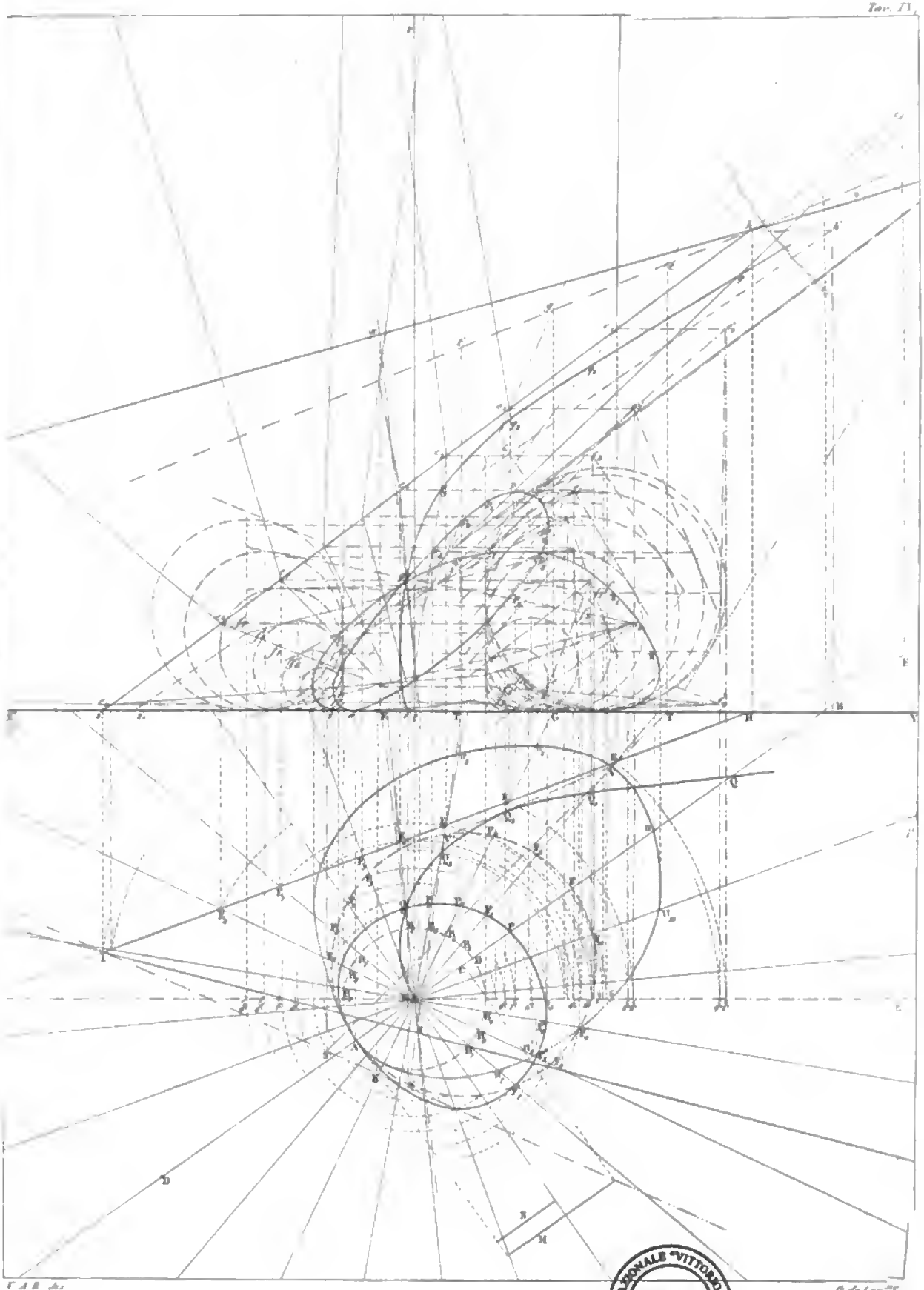
Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google